

Inspectoratul Școlar al Județului Prahova
Concursul de matematică
Etapa locală - 1 februarie 2003 - Clasa a V-a

Subiecte:

1. a) Scrieți numărul 221 ca produs de numere prime și precizați numărul divizorilor săi. Dacă \overline{ab} este cel mai mare număr prim din descompunerea obținută, determinați restul împărțirii numărului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot \overline{ab}$ la 693.
Profesor Mihail Focșeneanu, Ploiești
- b) Să se arate că numărul $a = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 2002 \cdot 2003$ nu este pătrat perfect.
Profesor Gheorghe Bumbăcea, Bușteni
2. Să se arate că numărul $a = 49^n \cdot 3^{n+1} \cdot 34 + 7^{2n+1} \cdot 3^{n+1} + 7^{2n} \cdot 3^n \cdot 20$ este divizibil cu 3003 oricare ar fi numărul natural nenul n .
Profesor Adelina Apostol, Ploiești
3. Diferența a două numere este 6. Să se afle câtul și restul împărțirii sumei lor la numărul mai mic.
Profesor Tatiana Pană, Ploiești
4. Determinați numerele de forma \overline{abc} știind că: $a^a = a + 2b + 3c$.
Profesor Gheorghe Achim, Mizil

Notă:

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10.

Fiecare lucrare primește 4 puncte din oficiu.

**OLMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 2003 – 2004**

Clasa a V – a

1. Aflați x număr natural, știind că:

- a) $\{10^3 + 10^2 \cdot [10 + (5^2 - x) : 5]\} : 20^2 = 6$
b) $(11 + 11^2 + 11^3) : 133 + x < 2^4$

2. Cinci cărți și trei caiete costă 580.000 lei, iar trei cărți și cinci caiete costă 460.000 lei. Câte cărți și câte caiete se pot cumpăra cu 815.000 lei, dacă s – au cumpărat 13 bucăți.

prof. Pleșa Romulus, prof. Pleșa Viorica

3. Se consideră numărul natural:

$$A = 3^{2002} \cdot 4^{2003} \cdot 5^{2004} + 3^{2003} \cdot 4^{2004} \cdot 5^{2002} + 3^{2004} \cdot 4^{2002} \cdot 5^{2003}$$

- a) Să se arate că numărul A împărțit la 193 dă restul 0 (zero).
b) Cu câte cifre de zero se termină numărul A ?

prof. Radu Ghenghiu

4. Dovediți că numărul natural $a = 2001 + 2(1 + 2 + 3 + \dots + 2000)$ este pătrat perfect.

Notă:

- toate subiectele sunt obligatorii;
- timp de lucru: două ore;
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7.

**OLMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 2003 – 2004**

Clasa a VI – a

1. Arătați că pentru orice nr. n natural

a) $67 \mid 8^{n+2} + 3 \cdot 8^n$

b) $7 \mid 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n$

2. Se dau numerele: $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2002^2$ și
 $B = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + 2001 \cdot 2003$. Calculați $A - B$.

RMT nr. 1 / 2003

3. Se consideră punctele A, B, C, D, M și N astfel încât $B \in (AC)$, $C \in (BD)$ și M este mijlocul segmentului $[AC]$ și N este mijlocul segmentului $[AD]$. Dacă $BC = 2, (6) \cdot AB$, $CD = 1, 1 (9) \cdot BC$ și $MN = 11, (076923)$ cm. Să se afle:

a). Lungimea segmentelor $[AB], [BC], [CD]$;

b). Lungimea segmentului $[AP]$, știind că $P \in [AD]$, iar $AB \cdot AP \in IN$.

prof. Pleșa Romulus, prof. Pleșa Viorica

4. Suma a două numere este 2004. Să se determine cele două numere știind că unul dintre ele este produs de numere prime, iar celălalt este un număr prim.

prof. Radu Ghenghiu

Notă:

- toate subiectele sunt obligatorii;
- timp de lucru: două ore;
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7.

Inspectoratul Școlar al Județului Prahova
Concursul de matematică
Etapă locală - 1 februarie 2003 - Clasa a VI-a

Subiecte:

1. Se dă $F = \frac{\overline{xyz + 91}}{\overline{xyz - 10}}$. Să se calculeze $x + y + z$ știind că $F \in \mathbb{N}$.

Profesori Ioana și Gheorghe Crăciun, Plopeni

2. O echipă de trei lucrători realizează împreună o lucrare. Unul din ei constată că, dacă suma totală primită pentru realizarea lucrării s-ar împărți în părți direct proporționale cu 7; 2; 3, ar primi cu 250000 lei mai puțin decât dacă aceeași sumă s-ar împărți în părți invers proporționale cu 0,(6); $1\frac{1}{2}$; 2. Aflați suma totală primită de echipă pentru realizarea lucrării.

Profesor Ion Pascaru, Ploiești

3. Se consideră în jurul unui punct unghiuri având măsurile exprimate în grade prin numere naturale consecutive. Știind că diferența dintre măsurile celui mai mare și celui mai mic dintre unghiuri este 14° , să se afle numărul unghiurilor și măsurile acestora.

Profesor Dragoș Moldoveanu, Sinaia

4. a) Pe o dreaptă se consideră punctele A, B, C, D astfel încât $[CD] \subset [AB]$ și $[AC] \equiv [BD]$; arătați că segmentele $[AB]$ și $[CD]$ au același mijloc.
b) Dacă se colorează punctele drepte cu două culori, arătați că există 3 puncte de aceeași culoare astfel încât unul dintre ele este mijlocul segmentului determinat de celelalte două.

Profesor Dragoș Moldoveanu, Sinaia

Notă:

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10.

Fiecare lucrare primește 4 puncte din oficiu.

**OLMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 2003 – 2004**

Clasa a VII – a

1. Aflați $x \in Q$, din egalitățile:

a) $\frac{2^{1988}}{x} = \frac{4^{993}}{0,25}$; b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{100} : \frac{1}{2^{98}} \cdot x = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{200} + \frac{1}{2^{201}}$ ***

2. Să se demonstreze că:

$$\frac{x^2 - 4x + 125}{x - 2} + \frac{y^2 - 4y + 173}{y - 2} + \frac{z^2 - 4z + 293}{z - 2}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}, x > 2, y > 2, z > 2.$$

Când avem egalitate ?

prof. Pleșa Romulus, prof. Pleșa Viorica

3. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($A = 90^\circ$) și D proiecția lui A pe BC . Dacă bisectoarea unghiului B intersectează pe $[AD]$, $[AC]$ și perpendiculara în C pe BC respectiv în punctele I , E , F , să se arate că:

a) ΔAIE și ΔCEF sânt triunghiuri isoscele;

b) are loc relația: $AI^2 = ID \cdot FC$;

c) dacă E este mijlocul segmentului $[BF]$, atunci $m(\hat{B})$ este egală cu 60° și $AI = 2 \cdot ID$.

prof. Gal - Chis Alexandru

4. In triunghiul echilateral ABC , $M \in (AB)$, $N \in (BC)$ și D este mijlocul laturii AC .

a) Demonstrați că $MN < AN < AC$

b) Dacă $m(\angle MND) = 90^\circ$ stabiliți care din afirmațiile de mai jos este corectă și justificați răspunsul:

i) $BM < BN$;

ii) $BM = BN$;

iii) $BM > BN$.

Notă:

- toate subiectele sunt obligatorii;
- timp de lucru: trei ore;
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7.

Inspectoratul Școlar al Județului Prahova
Concursul de matematică
Etapa locală - 1 februarie 2003 - Clasa a VII-a

Subiecte:

1. Calculați suma:

S=

$$2n \cdot (-1)^n + (2n + 2) \cdot (-1)^{n+1} + (2n + 4) \cdot (-1)^{n+2} + (2n + 6) \cdot (-1)^{n+3} + \dots + (2n + 100) \cdot (-1)^{n+50}$$

, unde $n \in \mathbf{N}^*$, știind că numerele $2n$ și $2n+2$ sunt direct proporționale cu numerele 0,048 și 0,(048).

Profesori Maria și Anton Negrilă, Ploiești

2. a) Să se arate că există $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $(10-x) + n - 2 \cdot |10-x| = x$, pentru orice x număr natural, $x \leq 10$.

b) Pentru x număr natural, $x \leq 10$, arătați că există zece numere naturale nenule, x_1, x_2, \dots, x_{10} cu proprietatea:

$$x = (x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) - x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{10}.$$

Profesor Adrian Ghioca, Sinaia

3. Determinați poziția punctelor P și Q, situate respectiv pe cateta AC și ipotenuza BC, astfel încât suma lungimilor segmentelor BP și PQ să fie cea mai mică (minimă). Justificați alegerea făcută.

Profesor dr. C.C.Florea, Câmpina

4. Pe laturile [AB] și [BC] ale triunghiului echilateral ABC se construiesc în afară pătratele ABMN și BCPQ. Să se arate că:

a) $AQ \perp MC$ și $[AQ] \equiv [MC]$;

b) $AQ \cap MC = \{E\}$ și $F \in [AC]$ astfel încât $[AF] \equiv [FC]$, să se arate că punctele B, E, F sunt coliniare.

c) AC și MQ sunt paralele.

Profesori Maria și Anton Negrilă, Ploiești

Notă:

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10.

Fiecare lucrare primește 4 puncte din oficiu.

Inspectoratul Școlar al Județului Prahova
Concursul de matematică
Etapa locală - 1 februarie 2003 - Clasa a VIII-a

Subiecte:

1. a) Arătați că $\sqrt{6-2\sqrt{3}} + \sqrt{10+2\sqrt{3}} < 6$;
b) Demonstrați că pentru orice numere reale x, y avem:
$$x^2 + y^2 - 2(x+y) + 6 \geq 2\sqrt{2} \cdot (y-x).$$

Stabiliți când avem egalitate

Profesor Stelian Banu, Câmpina

2. Fie a, b numere reale care verifică sistemul:

$$\begin{cases} a^2b = 7a^2 + 2b^2 \\ ab^2 = 6a^2 + 5ab + 6b^2 \end{cases}$$

- a) Dovediți că $7a^2b + 2b^3 = a^2b^2$;
b) Determinați toate perechile (a, b) de numere reale care verifică sistemul dat.

Profesori Carmen și Nicolae Angelescu

3. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată, dreaptă, cu $AB = a$ și $AA' = h$.

Pentru $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ fixăm $M \in (AA')$, $N \in (BB')$, $P \in (CC')$ astfel încât

$$AM = \alpha AA', BN = \frac{3\alpha}{2} BB', CP = \frac{\alpha}{2} CC'.$$

- a) Să se determine dreapta de intersecție a planelor (MNP) și (ABC) ;
b) În cazul în care triunghiul MNP este dreptunghic, calculați cosinusul unghiului plan al diedrului format de planele (MNP) și (ABC) .

Profesor Petre Năchilă

4. Fie paralelogramul $ABCD$ pe planul căruia se ridică perpendicularele a, b, c, d ($A \in a, B \in b, C \in c$ și $D \in d$) și pe aceste perpendiculare se iau punctele $M \in a, N \in b, P \in c$ și $Q \in d$ (de aceeași parte a planului).

- a) Dacă E este mijlocul segmentului MP și F este mijlocul segmentului NQ , demonstrați că EF este perpendiculară pe (ABC) ;
b) Dacă $AM = 3t, CP = 13t$ și $QD = 10t$ ($t > 0$), determinați lungimea segmentului BN astfel încât punctele M, N, P, Q să fie coplanare.

Profesori Maria și Anton Negrilă, Ploiești

Notă:

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10.

Fiecare lucrare primește 4 puncte din oficiu.

**OLMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 2003 – 2004**

Clasa a VIII – a

1. Să se determine mulțimile A și B , știind că sunt îndeplinite simultan următoarele condiții:

a) $A \cup B = \mathbb{R} \setminus [8; \infty)$;

b) $A \cap B = [-2; 1] \cup \{4\}$;

c) $B \setminus A = (4; 8)$.

prof. Pop Horia

2. Arătați că dacă a, b, c, d sunt numere naturale consecutive, atunci $abcd+1$ este pătrat perfect.

3. Dacă $x, y \in [a, b]$ $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ atunci

$$2 \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

prof. Cicortaș Marius

4. Fie A, B, C, D puncte necoplanare astfel încât $AB=AC=AD=4$ cm, $BC=BD=CD=6$ cm, G_1, G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ABC , respectiv ACD .

a) Arătați că $G_1G_2 \parallel (ABD)$;

b) Calculați distanța de la A la planul (BCD) ;

c) Aflați $\text{tg}(\angle((ACD), (BCD)))$;

d) Calculați distanța dintre AB și CD .

Notă:

- toate subiectele sunt obligatorii;
- timp de lucru: trei ore;
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7.