

**FORMULA LUI HERON DE-A LUNGUL VEACURILOR**

MIRON OPREA

*Heron* din Alexandria, numit și Heron Mecanicul, de origine egipteană, a fost unul din reprezentanții de seamă ai celebrei *Școli din Alexandria*. A trăit și a activat în perioada finelui secolului I și începutul secolului al II-lea d. Hr. El a scris lucrări de *geometrie* și *mecanică*, dintre care cele mai importante sunt *Metrica* (originalul ei a fost descoperit în 1869 la Constantinopol) și *Dioptra*.

În *Metrica*, Heron dă două metode pentru calculul ariei unui triunghi când i se cunosc lungimile laturilor; prima se reduce la calculul unei înălțimi a triunghiului (folosind teorema lui Pitagora generalizată așa cum o întâlnim în manualele școlare), iar a doua utilizează segmentele determinate pe laturi de cercul înscris în triunghi, ceea ce a condus la celebra formulă  $\sigma(\Delta ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , rămasă în istorie, ca *formula lui Heron*. Frumusețea formulei, ca și teorema lui Pitagora, a atras atenția multor matematicieni în decursul istoriei, astfel că s-au dat mai multe demonstrații chiar de către matematicieni celebri ca Newton, Euler etc.

Mai mult, s-au căutat formule analoage pentru *patrulaterul* (numai patrulaterul înscrisibil permite o formulă analoagă), pentru *tetraedre* (numai tetraedrele *echifaciale* și cele *tridreptunghice* admit), ba chiar și pentru *triunghiurile sferice*. Pe de altă parte, expresia  $\sigma(\Delta ABC)$  a trezit ideea determinării triunghiurilor pentru care avem  $(a, b, c, \sigma(\Delta)) \in N^*$ , așa numitele *triunghiuri heronice*, declanșând astfel o veritabilă teorie geometrică pe care am putea-o numi „*geometrie heronică*”. Unii istorici ai matematicii, au ajuns la concluzia că formula lui de calcul a ariei unui triunghi, în funcție de laturile sale, a fost stabilită de *Arhimede*, și de aceea ar trebui să fie numită *formula lui Arhimede-Heron*.

În cele ce urmează vom încerca să prezentăm cititorului „câte ceva” din această geometrie. Dar mai întâi, vom expune câteva demonstrații date în decursul istoriei, acestei celebre formule.

**I. Demonstrații ale formulei lui Heron**

**1. Demonstrația lui Heron** (sec. I d. Hr.) Urmărim pe figura 1. Se prelungește AC cu lungimea CM=BE, astfel că  $AM = p = \frac{a+b+c}{2}$ , unde a, b, c sunt lungimile laturilor  $\Delta ABC$ .

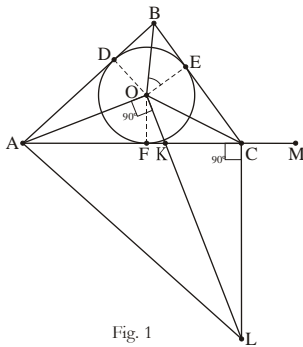


Fig. 1

Avem evident  $AM \cdot OF = p \cdot r = \sigma(\Delta ABC) = S$  unde r este lungimea razei cercului înscris triunghiului. Perpendicularele în O pe AO și în C pe AC se întâlnesc în L, evident patrulaterul AOCL este înscrisibil și deci  $\angle AOC + \angle ALC = 2dr$ .

Însă  $\angle AOC + \angle BOE = 2dr$  din care rezultă  $\angle ALC = \angle BOE$  și triunghiurile dreptunghice ACL și BOE sunt asemenea.

$$\text{Deci: } \frac{AC}{BE} = \frac{CL}{OE} = \frac{AL}{OB} \quad (*)$$

De asemenea  $\Delta CKL \sim \Delta FOK$  (unde  $AC \cap OL = \{K\}$ )

$$\text{Deci: } \frac{CL}{OF} = \frac{CK}{FK} = \frac{KL}{OK} \quad (**)$$

$$\text{Din } (*) \text{ și } (**) \text{ rezultă } \frac{AC}{CM} = \frac{CK}{FK} \Rightarrow \frac{AC + CM}{CM} = \frac{CK + KF}{KL}$$

sau  $\frac{AM}{CM} = \frac{CF}{KF} \Leftrightarrow \frac{AM^2}{AM \cdot CM} = \frac{AF \cdot CF}{AF \cdot KF}$ . Cum  $\Delta AOK$  este dreptunghic, avem:

$$AF \cdot FK = OF^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AM^2}{AM \cdot CM} = \frac{AF \cdot CF}{OF^2}. \text{ Urmează că } AM^2 \cdot OF^2 = AM \cdot AF \cdot CM \cdot CF \text{ sau}$$

$$S^2 = \sigma^2(\triangle ABC) = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

În încheiere, Heron calculează cu această formulă, aria unui triunghi cu laturile 7, 8, 9, găsind  $12\sqrt{5} = \sqrt{720}$ .

**2. Demonstrația a trei frați arabi** (Mohammed, Ahmed și Alhasan în sec. al IX-lea d. Hr.)

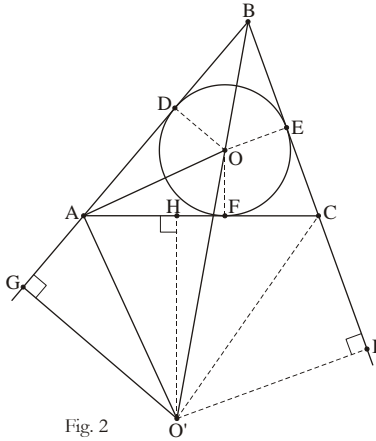


Fig. 2

Urmărim pe figura 2.

Prelungim laturile BA cu  $AG=CF$  și BC cu  $CI=AF$ ; avem  $BG=BI=p$ . Ducem în G perpendiculara pe BA care întâlnește bisectoarea BO în  $O'$ , astfel că  $O'G = O'I$  unde I este piciorul perpendicularei duse din  $O'$  pe BC. Luăm pe AC,  $AH=AG$  și avem

$$O'C^2 = O'I^2 + IC^2 \text{ și } O'A^2 = O'G^2 + AG^2; \text{ de unde } O'C^2 - O'A^2 = IC^2 - AG^2.$$

Cum  $AH = AG = p - c$ ;

$CH = b - AH = b - AG = p - a = IC$ . Deducem că:

$O'C^2 - O'A^2 = CH^2 - AH^2$  ceea ce înseamnă că H este piciorul perpendicularei coborâte din  $O'$  pe AC și deci  $O'A$  este bisectoarea unghiului  $\angle GOH$ .

Pe de altă parte în patrulaterul inscriptibil  $GAHO'$ ,

avem  $\angle GAH + \angle GO'H = 2dr$  și cum  $\angle GAH + \angle BAH = 2dr$  rezultă  $\angle GO'H = \angle BAH$  precum și jumătățile lor:  $\angle GO'A = \angle DAO$ . Se observă că  $\triangle AGO' \sim \triangle ADO$ ; de unde

$$\frac{OD}{AG} = \frac{AD}{O'G} \Leftrightarrow OD \cdot O'G = AD \cdot AG \text{ și } \frac{OD}{O'G} = \frac{OD^2}{OD \cdot O'G} = \frac{OD^2}{AD \cdot AG}. \text{ Cum } OD \parallel O'G, \text{ avem că}$$

$$\frac{OD}{O'G} = \frac{BD}{BG} \Rightarrow \frac{OD^2}{AD \cdot AG} = \frac{BD}{BG}.$$

$$\text{Deci } OD^2 \cdot BG = AD \cdot BD \cdot AG \Leftrightarrow OD^2 \cdot BG^2 = BG \cdot AD \cdot BD \cdot AG \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S^2 = \sigma^2(\triangle ABC) = p(p-a)(p-b)(p-c) \text{ unde } BG=p; AD=p-a; BD=p-b; AG=p-c.$$

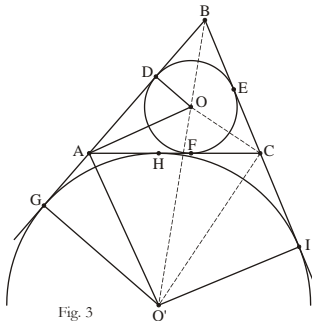


Fig. 3

**3. O demonstrație clasică** (care apare în mai multe lucrări ale matematicienilor din perioada sec. XII - XV, fără a putea fi atribuită unui autor concret).

Urmărim pe Figura 3.

Fie  $O'$  centrul cercului exînscriștriunghiului, corespunzător unghiului B, a cărui rază este  $r'$ , iar G, H, I punctele de contact ale cercului cu laturile triunghiului. Avem mai întâi  $\sigma(\triangle ABC) = p \cdot r$ ; apoi

$$\sigma(\triangle ABC) = \sigma(\triangle O'AB) + \sigma(\triangle O'BC) - \sigma(\triangle O'AC) = (c+a-b) \frac{r'}{2} = (p-b)r'$$

Prin înmulțirea acestor relații obținem:  $\sigma^2(\triangle ABC) = p(p-b) \cdot r \cdot r'$ .

Se observă că  $\triangle AGO' \sim \triangle ADO$ ; deci  $OD \cdot O'G = r \cdot r' = AD \cdot AG = (p-a)(p-c)$ ,

de unde rezultă  $S^2 = \sigma^2(\triangle ABC) = p(p-a)(p-b)(p-c)$ .

**4. Demonstrația lui Newton** ( din *Aritmetica universală*, 1707).

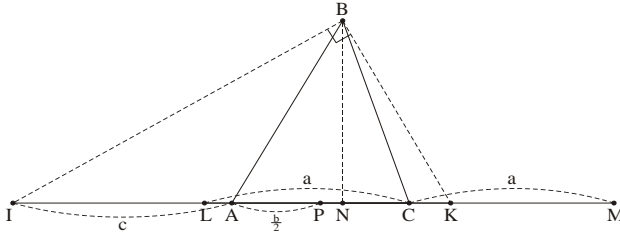


Fig. 4

Urmărim pe Figura 4.

Fie P mijlocul lui AC. Purtăm pe AC, de o parte și de alta față de A  $AJ=AK=c$  și la fel față de C,  $CL=CM=a$ . Evident  $\angle JBK=90^\circ$ ,

Fie  $BN \perp AC$ ; avem

$$AB^2 - BC^2 = AN^2 - CN^2 = (AN + CN)(AN - CN).$$

De unde rezultă  $PN = \frac{AB^2 - BC^2}{2AC} = \frac{c^2 - b^2}{2b}$ .

Din  $PK = c - \frac{b}{2}$  scădem PN și rezultă că

$$NK = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2b} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2b} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2b} = \frac{2(p-c)(p-b)}{b}.$$

Scăzând NK din  $JK=2c$ , avem:

$$JN = 2c - \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2b} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2b} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2b} = \frac{2p(p-a)}{b}$$

Cum  $\triangle JBK$  este dreptunghic, putem scrie:

$$BN = \sqrt{JN \cdot NK} = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ și } S = \sigma(\triangle ABC) = \frac{b \cdot BN}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

*Observație:* Din Fig. 4, observăm că

$JM=2p$ ;  $JL=c+b-a$ ;  $KM=a+b-c$ ;  $KL=c-b+a$ , de unde

$$JN = \frac{JM \cdot JL}{2b}; NK = \frac{KM \cdot KL}{2}, \text{ iar } BN = \frac{\sqrt{JM \cdot JL \cdot KL \cdot KM}}{2b} \text{ și deci}$$

$S = \sigma(\triangle ABC) = \frac{1}{4} \sqrt{JM \cdot JL \cdot KL \cdot KM}$  care exprimă aria triunghiului în funcție de cele patru segmente de pe AC, formă pe care a dat-o Newton.

**5. Demonstrația lui Euler** (1748)

Urmărim pe Figura 5.

Coborând din A pe CO perpendiculara AJ care întâlnește pe FO în K. Din figură avem:

$$\angle AOJ = \frac{1}{2} \angle BAC + \frac{1}{2} \angle BCA = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC = \angle BOD.$$

Se observă că:  $\triangle AJO \sim \triangle BDO \Rightarrow \frac{AJ}{JO} = \frac{BD}{r}$  (\*)

și  $\triangle ACJ \sim \triangle AOK \Rightarrow \frac{AC}{OK} = \frac{AJ}{JO}$  (\*\*).

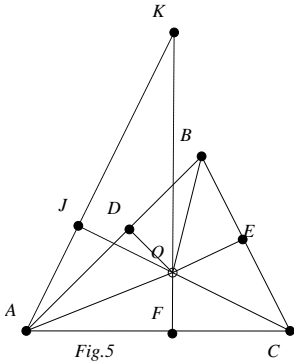


Fig.5

Scăzând (\*) din (\*\*), avem că

$$\frac{BD}{r} = \frac{AC}{OK} \Leftrightarrow BD \cdot OK = AC \cdot r; \text{ însă } OK = FK - r, \text{ deci}$$

$$BD \cdot OK = BD \cdot (FK - r) = BD \cdot FK - BD \cdot r; \text{ de unde}$$

$$BD \cdot FK = AC \cdot r + BD \cdot r = (BD + AC)r = p \cdot r.$$

Pe de altă parte  $\Delta CFO \sim \Delta KAF$

$$\Rightarrow \frac{FK}{AF} = \frac{CF}{r} \Leftrightarrow FK \cdot r = AF \cdot CF \text{ și}$$

$$BD \cdot FK \cdot r = AF \cdot BD \cdot CF.$$

$$\text{Rezultă că: } p \cdot r^2 = AF \cdot BD \cdot CF = (p-a)(p-b)(p-c)$$

sau

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

*Observație:* Fie AM ( $M \in BC$ ) mediană în  $\Delta ABC$  iar G = baricentrul  $\Delta ABC$ . Dacă D este simetricul lui G față de M, atunci se vede în figura 6, ușor că  $3\sigma(\Delta BDG) = \sigma(\Delta ABC)$ .

Dacă  $m_a, m_b, m_c$  sunt lungimile medianelor  $\Delta ABC$ , atunci

$$BD = \frac{2}{3}m_a; \quad BG = \frac{2}{3}m_b; \quad GD = \frac{2}{3}m_c \text{ iar semiperimetrul}$$

$$\Delta BDG \text{ este } \frac{1}{3}(m_a + m_b + m_c).$$

Aplicând formula lui Heron  $\Delta BDG$ , găsim că

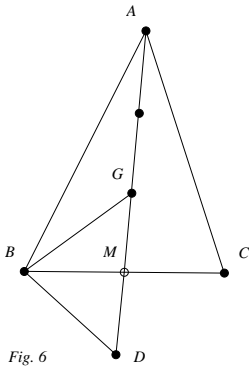


Fig. 6

$$S = \sigma(\Delta ABC) = \frac{1}{3} \sqrt{(m_a + m_b + m_c)(-m_c + m_b + m_c)(m_a - m_b + m_c)(m_a + m_b - m_c)}$$

## II Extinderi ale formulei lui Heron

### 1. La patrulatere

Se cunoaște că în comparație cu triunghiurile, la patrulatere apare și problema convexității. Evident vom lua în considerație numai patrulatele convexe care sunt construibile (*determinate*)

cunoscând numai lungimile laturilor. În acest mod, de la început excludem paralelogramul (evident și romb), ca și pătratul și dreptunghiul. Primul patrulater în vizor este trapezul care e determinat (deci are arie) cunoscându-i laturile: a (baza mică), b (baza mare) iar c și d laturile neparalele. În acest caz urmărind pe Figura 7, avem:

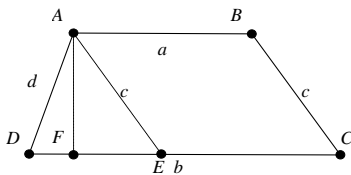


Fig. 7

Fie  $AE \parallel BC = c$ ; evident  $\Delta ADE$  este bine determinat cunoscându-i laturile: c, d, b-a. Din  $\Delta ADE$ , aplicând teorema cosinusurilor, găsim  $\cos \hat{D} = \frac{(b-a)^2 + d^2 - c^2}{2d(b-a)}$ .

$$\text{Deci } \sin \hat{D} = \sqrt{1 - \cos^2 D} = \frac{\sqrt{4d^2(b-a)^2 - [(b-a)^2 + d^2 - c^2]^2}}{2d(b-a)} \text{ iar}$$

$$\sigma(ABCD) = \frac{a+b}{4(b-a)} \sqrt{(c+d+a-b)(c+d-a+b)(a-b+c-d)(a-b-c+d)} \quad \text{formulă}$$

care nu îmbracă întocmai haina formulei lui Heron. În caz că  $c=d$  (trapez isoscel) avem:

$$\sigma(ABCD) = \frac{a+b}{4(b-a)} \sqrt{(a-b+2c)(-a+b+2c)(b-a)(b-a)}$$

$$\Rightarrow \sigma(ABCD) = \frac{a+b}{4} \sqrt{(a-b+2c)(-a+b+2c)} \text{ care aparent nu are o „formă Heron”}.$$

Să calculăm acum aria unui *patrulater inscriptibil* care e bine determinat de lungimile laturilor. Fie patrulaterul inscriptibil ABCD (deci suma măsurilor unghiurilor este  $180^\circ$ ) cu lungimile laturilor  $a, b, c, d$ . Aplicând teorema cosinusurilor triunghiurilor ABD și BCD pentru diagonala DB și egalând cele două expresii avem:

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \hat{A} = b^2 + c^2 + 2bc \cos \hat{A} \quad (\text{căci } \cos C = -\cos A) \text{ deducem}$$

$$\cos A = \frac{(a^2 + d^2) - (b^2 + c^2)}{2(bc + ad)} \quad \text{iar :}$$

$$1 + \cos A = \frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{2(bc+ad)} = \frac{(a+d+c-b)(a+d+b-c)}{2(bc+ad)}$$

$$1 - \cos A = \frac{(b+c)^2 - (a-d)^2}{2(bc+ad)} = \frac{(-a+b+c+d)(a+b+c-d)}{2(bc+ad)}.$$

Dacă notăm  $2p = a+b+c+d$ , atunci rezultă imediat că  $-a+b+c+d = 2(p-a)$ ;  $a-b+c+d = 2(p-b)$ ;  $a+b-c+d = 2(p-c)$  și  $a+b+c-d = 2(p-d)$  iar

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc+ad}}; \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{bc+ad}} \text{ și deci}$$

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{bc+ad}. \text{ Deci :}$$

$$\sigma(ABCD) = \sigma(ABD) + \sigma(BCD) = \frac{1}{2} [ad \sin A + bc \sin(180^\circ - A)] =$$

$$= \frac{\sin A}{2} (ad + bc) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \text{ care reprezintă formula lui Heron pentru patrulater inscriptibile .}$$

Se observă imediat că dacă  $c=d$  și  $AB \parallel CD$  (cazul trapezului isoscel care este totdeauna inscriptibil) formula găsită pentru acesta, este un caz particular al formulei de mai sus.

## 2. La tetraedre

Considerăm tetraedrul ABCD cu lungimile muchiilor  $BC=a$ ;  $CA=b$ ;  $AB=c$ ;  $DA=l$ ;  $DB=m$ ;  $DC=n$ , în [1] se demonstrează relația care exprimă volumul tetraedrului:

$$144V^2 = (-a^2 + b^2 + c^2 - l^2 + m^2 + n^2)a^2l^2 + (a^2 - b^2 + c^2 - m^2 + n^2)b^2m^2 + (a^2 + b^2 - c^2 + l^2 + m^2 - n^2)c^2n^2 - (a^2b^2c^2 + a^2m^2n^2 + b^2l^2n^2 + c^2l^2m^2)$$

care nu are o „formă heronică” în sensul celei de la triunghi.

**Axioma supliment matematic Nr.35**

Dacă considerăm tetraedrul tridreptunghic OABC cu  $OA \perp OB \perp OC$  și cu  $BC=a$ ;  $CA=b$ ;  $AB=c$ ;  $OA=p$ ;  $OB=q$ ;  $OC=r$  ca în Figura 8, atunci

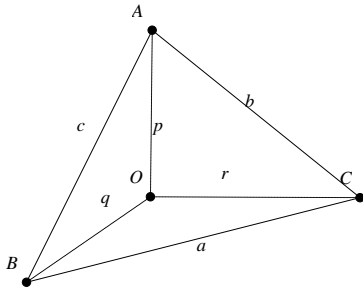


Fig. 8

$$V = \frac{p \cdot q \cdot r}{6} \Leftrightarrow 36V^2 = p^2 \cdot q^2 \cdot r^2.$$

$$\text{Cum } p^2 + q^2 = c^2; q^2 + r^2 = a^2; p^2 + r^2 = b^2$$

rezultă imediat, notând  $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = s^2$  că :

$$p^2 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} = s^2 - a^2;$$

$$q^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} = s^2 - b^2 \text{ și}$$

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = s^2 - c^2. \text{ Deci}$$

$$V = \frac{1}{6} \sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)(s^2 - c^2)}, \text{ „formula lui Heron” pentru tetraedru tridreptunghic.}$$

În cazul *tetraedrului echifacial* (tetraedru cu muchiile opuse congruente) cu toate cele patru fețe egale cu triunghiul ce are ca laturi a, b, c. Se observă că acest tetraedru se obține din divizarea paralelipipedului dreptunghic cu muchiile de lungimi p, q, r prin plane așa cum se vede în Figura 9.

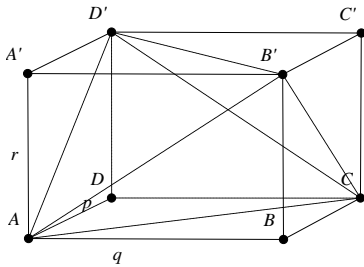


Fig. 9

Paralelipipedul  $ABCD A' B' C' D'$  se descompune în patru *tetraedre tridreptunghice*, luând vârfurile într-un anumit mod. De exemplu, dacă luăm vârfurile în  $A, C, B', D'$  (diametral opuse) avem următoarea descompunere:  $A.A'BD$ ;  $C.BDC'$ ;  $B'.BA'C'$ ;  $D'.DA'C'$  (patru *tetraedre tridreptunghice egale*, având fiecare volumul egal cu  $\frac{1}{6} p \cdot q \cdot r$ ) și *tetraedrul echifacial*  $ACB'D'$  (cele patru fețe sunt triunghiuri egale cu laturile

$$a = \sqrt{p^2 + q^2}; \quad b = \sqrt{q^2 + r^2}; \quad c = \sqrt{p^2 + r^2} ).$$

$$V_{(ACB'D')} = V_{(ABCD A' B' C' D')} - 4V_{(AA'BD)} = p \cdot q \cdot r - \frac{4}{6} p \cdot q \cdot r = \frac{1}{3} p \cdot q \cdot r$$

Cu notațiile de mai înainte, rezultă că:

$$V_{(ACB'D')} = \frac{1}{3} \sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)(s^2 - c^2)}$$

care reprezintă „formula lui Heron” pentru tetraedre echifaciale.

Aceste așa zise *formule Heron*, se pot extinde pentru *tetraedre n-dreptunghice și n-echifaciale* din  $\mathbf{R}^n$ .

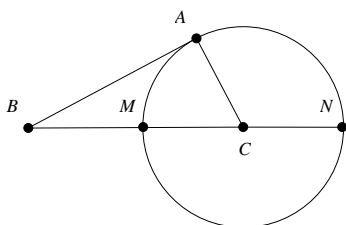
- Bibliografie:* [1] Dan Brânzei ș.a.: „Planul și spațiul euclidian” (Ed. Academiei, București 1986)  
 [2] George Pólya: „Descoperirea în matematică” (Ed. Științifică, București 1971)  
 [3] E. Kolman: „Istoria matematicii în antichitate” (Ed. Științifică, București 1963)  
 [4] Jacques Hadamard: „Lecții de geometrie elementară” (Ed. Tehnică, București 1960)  
 [5] Adrian C. Albu: „O istorie a matematicii” (Antichitatea), (Ed. Nomina, 2009)  
 [6] S. I. Novoselov: „Curs special de trigonometrie” (Ed. Tehnică, București 1956)  
 [7] E. Dăncilă și I. Dăncilă: „Învățată geometrie cu...mâinile tale” (Ed. Tehnica, București 2009)  
 [8] Stere Ianuș: „Probleme de geometrie și trigonometrie” (Ed. Didactică și pedagogică, București 1989)

***O mărturisire din experiența mea didactică***

GRAȚIELA CALCAN

De câte ori am predat teorema lui Pythagora, știind din *Istoria matematicii* că i s-au dat peste 500 de demonstrații mi-am pus problema să caut (evident din cele date) pe cea mai „scurtă”. Sper că am găsit-o, și de aceea mă bucur să o fac cunoscută și cititorilor revistei Axioma.

Fie  $\triangle ABC$  cu  $m(\angle A) = 90^\circ$ , ca în figura alăturată;



cercul cu centrul în C și rază CA, taie dreapta BC în M și N. Scriind puterea punctului B față de cerc, avem:

$$\overline{BA}^2 = \overline{BM} \cdot \overline{BN} = (\overline{BC} - \overline{AC})(\overline{BC} + \overline{AC}) = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$$

$$\text{Deci } \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

*Observație:* 1) Această demonstrație a fost dată în 1821 într-un manual de geometrie al cărui autor se

numește J.J. Hoffman.

2) Prof. Gh. Crăciun, în urma citirii acestei mărturisiri a mea, precum și a articolului prof. M. Oprea de mai înainte, afirmă pur și simplu, că

dacă se aplică formula lui Heron pentru triunghiul isoscel de mai jos a cărui arie este  $ab$ , se obține teorema lui Pythagora :  $a^2 + b^2 = c^2$ . Rămâne de cercetat (lăsăm pe seama cititorului) dacă nu cumva formula lui Heron ascunde (cuprinde) în ea deja teorema lui Pythagora. Lăsăm cititorul plăcerea de a constata cele semnalate de profesorul Gh. Crăciun.

