Olimpiada Locală deMatematică, 2010
Radu Simion, Ploieşti

Clasa a IX-a

Fie numerele reale pozitive $a_1, a_2, \dots a_{20}$ astfel încât

1. $a_1+a_2=4,\ a_2+a_3=\frac{4}{3},\ a_3+a_4=\frac{4}{5},\ a_4+a_5=\frac{4}{7},\ \dots,\ a_{19}+a_{20}=\frac{4}{37}$ şi

$A=\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}+\frac{a_2+a_3}{a_2a_3}+\frac{a_3+a_4}{a_3a_4}+\dots+\frac{a_{19}+a_{20}}{a_{19}a_{20}}$. Demonstraţi că $\sqrt{A}>19$.

Prof. Nicolae Radu, Ploieşti

Soluţie: Folosind că pentru numere pozitive x,y avem: $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4$, atunci:

$$A=\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{a_{19}}+\frac{1}{a_{20}}\right)\geq$$

$$\geq\frac{4}{a_1+a_2}+\frac{4}{a_2+a_3}+\dots+\frac{4}{a_{19}+a_{20}}=1+3+\dots 37=19^2$$

şi cum inegalitatea este strictă (altfel toate numerele ar fi egale, imposibil) rezultă $\sqrt{A}>19$.

2. Rezolvaţi ecuaţia $\left[x^2-4x+4\right]=\left[-2x^2+8x-6\right]$.

Prof. Petre Năchilă şi prof. Cătălin Năchilă, Ploieşti

Soluţie: Notăm $k=\left[x^2-4x+4\right]\in\mathbb{Z}$ şi

$$\begin{aligned}&(1): k\leq x^2-4x+4<k+1,\\&(2): k\leq -2x^2+8x-6<k+1\end{aligned}.$$

Adunăm la (2), (1) înmulţită cu 2 $\Rightarrow 3k\leq 2<3k+3\Rightarrow -\frac{1}{3}<k\leq\frac{2}{3}\overset{k\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} k=0$.

Din (1) : $0\leq(x-2)^2<1$, $0\leq -2(x-2)^2+2<1\Leftrightarrow\frac{1}{2}<(x-2)^2<1$, deci

$$x\in\left(1,\ 2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2},\ 3\right).$$

3. Fie *ABCDEF* un hexagon convex oarecare, G_1, G_2 centrele de greutate ale ΔACE, ΔBDF, H_1, H_2 ortocentrele $\Delta ACE, \Delta BDF$ şi *G* punctul din planul hexagonului cu proprietatea că $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}=\vec{0}$.

a) Arătaţi că $\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{G_1E}=\vec{0}$.

b) Arătaţi că $\overrightarrow{G_1G}$ şi $\overrightarrow{G_2G}$ sunt vectori coliniari.

c) Dacă hexagonul are toate vârfurile pe un cerc arătaţi că $\overrightarrow{G_1G}=\frac{1}{6}\overrightarrow{H_1H_2}$.

Prof. Gabriela Leu, Sinaia

Soluție: Fie *P* un pol în plan. Scriem toți vectorii de forma $\overrightarrow{PT} = T$. Cum G_1, G_2 sunt centre de greutate ale $\Delta ACE, \Delta BDF$ avem $3G_1 = A + C + E\ (a)),\ 3G_2 = B + D + F$, iar din relația

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0} \Rightarrow$
$\Rightarrow A - G + B - G + C - G + D - G + E - G + F - G = 0 \Rightarrow$
$6G = A + B + C + D + E + F \Rightarrow$. Deci
$3\left(\overrightarrow{G_1G} + \overrightarrow{G_2G}\right) = 3G - 3G_1 + 3G - 3G_2 = 6G - (A + C + E) - (B + D + F) = \vec{0}$ de unde rezultă b).

Din relațiile lui Sylvester $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF},\ \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$, unde *O* este centrul cercului. Deci $H_2 = B + D + F - 2O,\ H_1 = A + C + E - 2O$, scădem relațiile și bnem $\overrightarrow{H_1H_2} = A + B + C + D + E + F - 2(A + C + E) = 6G - 6G_1 = 6\overrightarrow{G_1G}$ de unde rezultă c).

4. Fie triunghiul *ABC*, *M* mijlocul lui $[BC]$, $D \in (AB), E \in (AC), DE \cap AM = \{N\}$. Arătați că: a) dacă *N* este mijlocul lui $[DE]$ atunci vectorii $\overrightarrow{DE}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

b) dacă *N* este mijlocul lui $[AM]$ și $2DB = 3DA$, atunci vectorii $\overrightarrow{ME}$ și $\overrightarrow{BN}$ sunt coliniari.

Prof. Claudiu Militaru

Soluție: Considerăm punctul *A* drept pol și scriem vectorii de forma $\overrightarrow{AT} = T$. Avem:
$D = \alpha B,\ E = \beta C,\ \alpha, \beta \in (0,1)$, $M = \dfrac{B + C}{2},\ N = (1 - k)D + kE,\ k \in (0,1)$.

a) dacă *N* este mijlocul lui $[DE]$, $N = \dfrac{D + E}{2} = \dfrac{\alpha B + \beta C}{2}$ și cum *N* și *M* sunt vectori coliniari rezultă $\dfrac{\frac{\alpha}{2}}{2} = \dfrac{\frac{\beta}{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow$ $\overrightarrow{DE} = \alpha(C - B)$ și $\overrightarrow{BC} = C - B$ sunt coliniari (proporționali).

b) dacă *N* este mijlocul lui $[AM]$ și $2DB = 3DA$, rezultă că $N = \dfrac{M}{2}, \alpha = \dfrac{2}{5}$. De aici

$\dfrac{M}{2} = (1 - k)\dfrac{2}{5}B + k\beta C \Rightarrow \dfrac{1}{4}B + \dfrac{1}{4}C = (1 - k)\dfrac{2}{5}B + k\beta C$ și cum B și C sunt vectori necoliniari rezultă $\dfrac{1}{4} = (1 - k)\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{4} = k\beta$ deci $k = \dfrac{3}{8}$ și $\beta = \dfrac{2}{3}$.

Acum $\overrightarrow{ME} = E - M = \dfrac{2}{3}C - \dfrac{B + C}{2} = -\dfrac{1}{2}B + \dfrac{1}{6}C$, iar $\overrightarrow{BN} = N - B = \dfrac{M}{2} - B = -\dfrac{3}{4}B + \dfrac{1}{4}C$

și cum $\dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}$ rezultă că vectorii $\overrightarrow{ME}$ și $\overrightarrow{BN}$ sunt coliniari.

Clasa a X-a

1. Demonstrați inegalitatea $\log_3(1+a+b)\cdot\log_3(1+b+c)\cdot\log_3(1+c+a)\le 1$, Ştiind că $a, b, c>0$ şi $a+b+c=3$.

Prof. Mihaiela Doinaru, Sinaia

Soluție: Aplicăm de două ori inegalitatea mediilor:

$$\log_3(1+a+b)\cdot\log_3(1+b+c)\cdot\log_3(1+c+a)\le$$

$$\left(\frac{\log_3(1+a+b)+\log_3(1+b+c)+\log_3(1+c+a)}{3}\right)^3=$$

$$=\left(\frac{\log_3(1+a+b)(1+b+c)(1+c+a)}{3}\right)^3\le$$

$$\le\left(\frac{1}{3}\log_3\left(\frac{(1+a+b)+(1+b+c)+(1+c+a)}{3}\right)^3\right)^3\le\left(\frac{1}{3}\log_3\left(\frac{9}{3}\right)^3\right)^3=1.$$

2. Rezolvați ecuaia: $x+\sqrt{2^x(x+1)}=\sqrt{x+1}$.

Prof. Gabriel Necula, Plopeni

Soluție: **2.** $x=-1$ nu e soluție şi împărțim cu $\sqrt{x+1}\Rightarrow\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{2^x}=1$.

Funcția *f* din stânga egalității este suma a 3 funcții strict crescătoare ($\sqrt{x+1}$ e strict crescătoare, $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ e strict descrescătoare, $-\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ e strict crescătoare). Deci *f* este injectivă.

Ecuația devine $f(x)=f(0)\overset{inj.}{\Leftrightarrow}x=0$.

3. Fie *n* un număr întreg.

a) Dacă *r* este restul împărțirii lui n^3 la 9, arătați că $r\in\{0,1,8\}$.

b) Demonstrați că $\left[\sqrt[3]{9n+1}\right]=\left[\sqrt[3]{9n+7}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *x*.

Prof. Cezar Apostolescu, Ploie□ti

Soluție: a) Considerăm resturile lui n la împărțirea cu 9: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ şi obținem resturile lui n^3 la împărțirea cu 9 ca resturile împărțirii numerelor $\{0^3,1^3,2^3,3^3,4^3,5^3,6^3,7^3,8^3\}$ la 9, adică $\{0,1,8\}$.

b) Presupunem prin absurd că $\left[\sqrt[3]{9n+1}\right]\ne\left[\sqrt[3]{9n+7}\right]$ şi cum $\sqrt[3]{9n+1}<\sqrt[3]{9n+7}$ rezultă că există $k\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\sqrt[3]{9n+1}<k\le\sqrt[3]{9n+7}\Leftrightarrow 9n+1<k^3\le 9n+7$, deci k^3 dă la împărțirea cu 9 unul din resturile: 2, 3, 4, 5, 6, 7 în contradicție cu a).

4. Fie $(z_n)_{n\ge1}$ un şir de numere complexe de acelaşi modul, cu proprietatea că

$z_k^2 = z_{k-1} \cdot z_{k+1}, \forall k \geq 2$. Ştiind că cel puţin trei termeni ai şirului sunt numere reale, arătaţi că mulţimea termenilor şirului este finită.

Gazeta Matematică 2009

Soluţie: Cum $\frac{z_k}{z_{k-1}} = \frac{z_{k+1}}{z_k}, \forall k \geq 2 \Rightarrow \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_3}{z_2} = \ldots \overset{notăm}{=} t$, deci $z_k = z_1 t^{k-1}, \forall k \geq 2$. Dacă numerele au modulul $r = 0$ şirul este constant, altfel cele trei numere reale din şir sunt din mulţimea $\{r, -r\}$, deci două dintre ele vor fi egale, să zicem

$z_m = z_n, m > n \Rightarrow t^{m-n} = 1$.

Atunci termenii şirului fac parte din mulţimea finită $\{z_1, z_1 t, z_1 t^2, \ldots, z_1 t^{m-n-1}\}$.

Clasa a XI-a

1. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 > 0, x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{\sqrt{x_{n+1}}}, n \geq 1$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 x_n^3$.

Gazeta Matematică 4/ 2009

Soluţie: Din ipoteză $x_n > 0, \forall n \geq 1$ şi cum

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n < x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} \Rightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{x_{n+1}}} < \frac{1}{\sqrt{x_{n+2}}}$ rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 2}$ este descrescător, iar din teorema Weierstrass este convergent. Notăm cu L limita sa, presupunem prin absurd că $L \neq 0$ şi avem

$nL \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{\sqrt{x_{n+1}}}, \Rightarrow 0 < x_{n+1} \leq \frac{1}{n^2 L^2}$ trecem la limită şi obţinem

$L = 0$, contradicţie, deci $L = 0$. Acum aplicăm teorema Stolz-Cesaro în cazul $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 x_n^3 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\frac{1}{x_n^3}}}\right)^2 \overset{S-C}{=} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{\frac{1}{x_{n+1}^3}} - \sqrt{\frac{1}{x_n^3}}}\right)^2 =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^3 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})^3}\right)^2 =$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\left(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}\right)^2 x_n+3\left(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}\right)x_n^2+x_n^3}\right)^2=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+3x_n\sqrt{x_n}+x_n^3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

2. Fie şirul $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietăţile:

a) $a_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$.

b) $a_{n+1}^2\cdot a_n^2=27+2a_{n+1}\cdot a_n^2, \forall n\in\mathbb{N}$.

Să se arate că $\lim_{n\to\infty} a_n=3$.

Prof. Octavian Purcaru, Ploieşti

Soluţie: Din b) $a_{n+1}^2-2a_{n+1}-\frac{27}{a_n^2}=0\overset{a)}{\Rightarrow}a_{n+1}=1+\sqrt{1+\frac{27}{a_n^2}}$ de unde $a_{n+1}>2$ şi

$a_{n+2}=1+\sqrt{1+\frac{27}{a_{n+1}^2}}<1+\sqrt{1+\frac{27}{4}}<4$, deci $a_n\in\left(2, 4\right), \forall n\geq 2$.

Avem $\left|a_{n+1}-3\right|=\left|\sqrt{1+\frac{27}{a_n^2}}-2\right|=\frac{\left|\sqrt{a_n^2+27}-2a_n\right|}{a_n}=\left|a_n-3\right|\frac{3\left(a_n+3\right)}{a_n\left(\sqrt{a_n^2+27}+2a_n\right)}=\left|a_n-3\right|b_n$. Dacă

$a_n\in\left(2, 3\right]\Rightarrow b_n<\frac{3(3+3)}{2\left(\sqrt{4+27}+4\right)}=a<1$, dacă $a_n\in\left[3, 4\right)\Rightarrow b_n<\frac{3(4+3)}{3\left(\sqrt{9+27}+6\right)}<a$,

deci $\left|a_{n+1}-3\right|<\left|a_n-3\right|a, \forall n\geq 2\Rightarrow\left|a_n-3\right|<\left|a_2-3\right|a^{n-2}$ şi din criteriul majorării, pentru că $a\in\left(0,1\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a^{n-2}=0$, avem $\lim_{n\to\infty}a_n=3$.

3. Pentru fiecare număr natural considerăm matricea de ordinul 3:

$$A_n=\begin{pmatrix} 2^{\left[\sqrt{n+1}\right]} & 2^{\left[\sqrt{n+2}\right]} & 2^{\left[\sqrt{n+3}\right]} \\ 2^{\left[\sqrt{n+4}\right]} & 2^{\left[\sqrt{n+5}\right]} & 2^{\left[\sqrt{n+6}\right]} \\ 2^{\left[\sqrt{n+7}\right]} & 2^{\left[\sqrt{n+8}\right]} & 2^{\left[\sqrt{n+9}\right]} \end{pmatrix}$$

. Să se arate că există $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $\forall n\geq k, n\in\mathbb{N}$, matricea A_n nu este inversabilă (am notat cu $\left[a\right]$ partea întreagă a lui a).

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

Soluție: Alegem $k=100$ și pentru $n\geq k \Rightarrow \sqrt{n+9}-\sqrt{n+1}=\dfrac{8}{\sqrt{n+9}+\sqrt{n+1}}<\dfrac{8}{20}<1$, adică mulțmea $\left\{\left[\sqrt{n+1}\right],...,\left[\sqrt{n+9}\right]\right\}$ are cel mult două elemente, deci cele 9 numere din matrice nu pot lua decât valoarea $2^{\left[\sqrt{n+1}\right]}=a$, eventual $2^{\left[\sqrt{n+1}\right]+1}=b$. Dacă

$$A_n=\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}\Rightarrow \det A_n=0, \text{ dacă } A_n=\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & b \end{pmatrix}\Rightarrow \det A_n=0, \text{ dacă}$$

$$A_n=\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & b & b \end{pmatrix}\Rightarrow \det A_n=0, ..., \text{ dacă } A_n=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}\Rightarrow \det A_n=0$$ (2 linii sau 2 coloane egale). Deci A_n nu este inversabilă.

4. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & \varepsilon^2 b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b, \varepsilon \in \mathbb{C}, B=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ și $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se demonstreze că:

$$A^n=\begin{pmatrix} \dfrac{(a+b\varepsilon)^n+(a-b\varepsilon)^n}{2} & \dfrac{(a+b\varepsilon)^n-(a-b\varepsilon)^n}{2}\varepsilon \\ \dfrac{(a+b\varepsilon)^n-(a-b\varepsilon)^n}{2\varepsilon} & \dfrac{(a+b\varepsilon)^n+(a-b\varepsilon)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Să se calculeze B^n.

c) Să se rezolve în $M_2(\mathbb{C})$ ecuația $X^n=B$.

Prof. Cezar Apostolescu, Ploiești

Soluție: a) Arătăm prin inducție după $n\geq 1$ că

$$A^n=\frac{(a+b\varepsilon)^n}{2}\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \dfrac{1}{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix}+\frac{(a-b\varepsilon)^n}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \\ -\dfrac{1}{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix}=\frac{(a+b\varepsilon)^n}{2}C+\frac{(a-b\varepsilon)^n}{2}D$$ folosind că $C^2=2C, D^2=2D, CD=DC=0_2$.

$n=1$. $A=\dfrac{(a+b\varepsilon)}{2}C+\dfrac{(a-b\varepsilon)}{2}D$, adevărat.

$n\to n+1\,(n\geq 1)$. Avem

$$A^{n+1}=A^nA=\left(\frac{(a+b\varepsilon)^n}{2}C+\frac{(a-b\varepsilon)^n}{2}D\right)\left(\frac{(a+b\varepsilon)}{2}C+\frac{(a-b\varepsilon)}{2}D\right)=$$

$$=\frac{(a+b\varepsilon)^{n+1}}{2}C+\frac{(a-b\varepsilon)^{n+1}}{2}D.$$

b) Pentru $a=3, b=4, \varepsilon=\dfrac{3}{2}$ din a) rezultă $B^n=\begin{pmatrix} \dfrac{9^n+(-3)^n}{2} & \dfrac{9^n-(-3)^n}{2}\cdot\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{9^n-(-3)^n}{3} & \dfrac{9^n+(-3)^n}{2} \end{pmatrix}$.

c) $X\cdot\left|X^n=B\Rightarrow X^{n+1}=XB,\ X^n=B\right|\cdot X\Rightarrow X^{n+1}=BX$ deci $XB=BX$. Dacă $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avem $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Rightarrow b=\dfrac{9}{4}c,\ d=a$ deci $X=\begin{pmatrix} a & \varepsilon^2 c \\ c & a \end{pmatrix},\ \varepsilon=\dfrac{3}{2}$ şi din a) rezultă

$$X^n=\begin{pmatrix} \dfrac{(a+c\varepsilon)^n+(a-c\varepsilon)^n}{2} & \dfrac{(a+c\varepsilon)^n-(a-c\varepsilon)^n}{2}\varepsilon \\ \dfrac{(a+c\varepsilon)^n-(a-c\varepsilon)^n}{2\varepsilon} & \dfrac{(a+c\varepsilon)^n+(a-c\varepsilon)^n}{2} \end{pmatrix},\ \begin{cases} (a+c\varepsilon)^n+(a-c\varepsilon)^n=6 \\ (a+c\varepsilon)^n-(a-c\varepsilon)^n=12 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a+c\varepsilon)^n=9 \\ (a-c\varepsilon)^n=-3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a+\dfrac{3}{2}c=u \\ a-\dfrac{3}{2}c=v \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\dfrac{u+v}{2} \\ c=\dfrac{u-v}{3} \end{cases}$$, unde $u^n=9, v^n=-3, u, v\in\mathbb{C}$.

Clasa a XII-a

1. Calculaţi: a) $I_1=\displaystyle\int\frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{x^4+2x^3+x^2+2x+1}},\ x\in(0,\infty)$.

Prof. Gabriel Necula, Plopeni

b) $I_2=\displaystyle\int\frac{9x^3+9mx^2+(18+2m^2)x+6m}{(3x^2+2mx+5)^n}dx,\ x\ge 0,\ m\ge 0,\ n\in\mathbb{N},\ n\ge 3$.

Prof. Mihaiela Doinaru, Sinaia

Soluţie: a)

$$I_1=\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\sqrt{x^2+2x+1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\int\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)'dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1-2}}=\int\frac{\left(x+\frac{1}{x}+1\right)'dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^2-2}}=$$

$$=\ln\left|x+\frac{1}{x}+1+\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^2-2}\right|+C.$$

b) $I_2=\int \frac{\left(3x^2+2mx+5\right)\left(3x+m\right)+3x+m}{\left(3x^2+2mx+5\right)^n}dx=$

$$=\frac{1}{2}\left(\int \frac{\left(3x^2+2mx+5\right)'}{\left(3x^2+2mx+5\right)^{n-1}}dx+\int \frac{\left(3x^2+2mx+5\right)'}{\left(3x^2+2mx+5\right)^{n}}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2(2-n)}\frac{1}{\left(3x^2+2mx+5\right)^{n-2}}+\frac{1}{2(1-n)}\frac{1}{\left(3x^2+2mx+5\right)^{n-1}}+C\,.$$

2. Se consideră şirurile:

$$I_n=\int_{-a}^{a}\sin^2 nx\cdot\ln\frac{2a+x}{2a-x}dx \quad \text{şi} \quad K_n=\int_{0}^{a}\sin^2 nx\cdot\ln\frac{2a+x}{2a-x}dx,$$ unde $a>0$, fixat, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} K_n$.

Prof. Octavian Purcaru, Ploieşti

Soluţie: a)

$$I_n=\int_{-a}^{a}\sin^2 nx\cdot\ln\frac{2a+x}{2a-x}dx\overset{x=-y}{=}-\int_{a}^{-a}\sin^2 ny\cdot\ln\frac{2a-y}{2a+y}dy=\int_{-a}^{a}\sin^2 ny\cdot\ln\left(\frac{2a+y}{2a-y}\right)^{-1}dy=-I_n$$

de unde $I_n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

b) $K_n=\int_0^a\sin^2 nx\cdot\ln\frac{2a+x}{2a-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^a\left(1-\cos 2nx\right)\cdot\ln\frac{2a+x}{2a-x}dx=$

$$\frac{1}{2}\int_0^a\ln\frac{2a+x}{2a-x}dx-\frac{1}{2}\int_0^a\cos 2nx\cdot\ln\frac{2a+x}{2a-x}dx$$

(1): $\int_0^a\ln\frac{2a+x}{2a-x}dx=\int_0^a\left[(2a+x)'\ln(2a+x)+(2a-x)'\ln(2a-x)\right]dx=$

$$\left[(2a+x)\ln(2a+x)+(2a-x)\ln(2a-x)\right]\Big|_0^a=$$

$$=3a\ln 3a+a\ln a-2a\ln 2a-2a\ln 2a=a(3\ln 3-4\ln 2)$$

(2): $\int_0^a\cos 2nx\cdot\ln\frac{2a+x}{2a-x}dx=\frac{1}{2n}\int_0^a\left(\sin 2nx\right)'\cdot\ln\frac{2a+x}{2a-x}dx=$

$$=\frac{1}{2n}\sin 2nx\ln\frac{2a+x}{2a-x}\Big|_0^a--\frac{1}{2n}\int_0^a\left(\sin 2nx\right)\cdot\left(\frac{1}{2a+x}+\frac{1}{2a-x}\right)dx$$

$=\frac{1}{2n}\sin 2na\cdot\ln 3-\frac{1}{2n}\int_0^a\frac{\sin 2nx}{2a+x}dx-\frac{1}{2n}\int_0^a\frac{\sin 2nx}{2a-x}dx$, iar $\frac{1}{2n}\sin 2na\cdot\ln 3\overset{n\to\infty}{\to}0$,

$$\frac{1}{2n}\left|\int_0^a \frac{\sin 2nx}{2a+x}dx\right| \le \frac{1}{2n}\int_0^a \left|\frac{\sin 2nx}{2a+x}\right|dx \le \frac{1}{2n}\int_0^a \frac{1}{2a+x}dx = \frac{1}{2n}\ln\frac{3}{2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ şi}$$

$$\frac{1}{2n}\left|\int_0^a \frac{\sin 2nx}{2a-x}dx\right| \le \frac{1}{2n}\int_0^a \left|\frac{\sin 2nx}{2a-x}\right|dx \le \frac{1}{2n}\int_0^a \frac{1}{2a-x}dx = \frac{1}{2n}\ln 2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Din (1) şi (2) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = a(3\ln 3 - 4\ln 2)$.

3. Fie A un inel cu proprietatea că dacă $x \in A$ şi $x^2 = 0$, atunci $x = 0$. Fie $a, b, c \in A$, astfel încât $a = ab, b = bc, c = ca$. Să se arate că $a = b = c$.

Gazeta Matematică 9 ⁄ 2008

Soluţie: $a^2 = aa = abab = abcab = abcb = abb = ab = a$,

$b^2 = bb = bcbc = bcabc = bcac = bcc = bc = b$ şi $ba = bca = bc = b$ deci

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 + b^2 - ab - ba = a^2 + b^2 - a - b = 0 \Rightarrow a = b$.

Analog $b = c$.

4. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy - ax - ay + a^2 + a,\ a \in \mathbb{R}$.

a) Determinaţi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pentru care intervalul $[\alpha, \beta]$ este parte stabilă în raport cu legea şi pentru care $\beta - \alpha$ este maxim.

b) Pentru α, β determinaţi la punctul a), aflaţi mulţimile $H \subset [\alpha, \beta]$ astfel încât $(H, \circ)$ grup.

Prof. Claudiu Militaru, Ploieşti

Soluţie: a) Considerăm $f : [\alpha, \beta] \to [\alpha - a, \beta - a],\ f(x) = x - a$, avem f bijectivă şi $f(x \circ y) = f(x)\cdot f(y), \forall x, y \in [\alpha, \beta]$. Dacă intervalul $[\alpha, \beta]$ este parte stabilă în raport cu legea "$\circ$", atunci intervalul $[\alpha - a, \beta - a]$ este parte stabilă în raport cu înmulţrea. Dacă, prin absurd, există $t \in [\alpha - a, \beta - a], |t| > 1 \Rightarrow t^n \in [\alpha - a, \beta - a], \forall n \in \mathbb{N}^*$ în contradicţie cu faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} |t|^n = \infty$. Deci $[\alpha - a, \beta - a] \subseteq [-1, 1]$ şi cum $[-1, 1]$ este parte stabilă în raport cu înmulţirea rezultă că intervalul $[\alpha, \beta] = [a-1, a+1]$ este parte stabilă în raport cu legea "$\circ$" pentru care $\beta - \alpha$ este maxim.

b) $(H, \circ)$ este grup $\Leftrightarrow$ $(f(H), \cdot)$ este grup. Dacă $0 \in f(H) \Rightarrow f(H) = \{0\} \Rightarrow H = \{a\}$, dacă $0 \notin f(H)$ atunci elementul neutru este 1 şi $\nexists x \in f(H), |x| < 1$ (altfel $\frac{1}{x} \in f(H), \left|\frac{1}{x}\right| > 1$). Deci $f(H)$ poate fi $\{1\}$ sau $\{1, -1\}$. În concluzie $H \in \{\{a\}, \{a+1\}, \{a+1, a-1\}\}$.