

**COLEGIUL NAȚIONAL "NICHITA STĂNESCU"
PLOIEȘTI**

**RAPOARTE, PROCENTE,
PROPORȚII
ȘI APLICAȚII ALE
ACESTORA ÎN
PROBLEMELE PRACTICE-
considerații metodico-științifice**

prof. Ștefania Vasile

CUPRINS

- 1. Competente generale si specifice. Continuturi**
- 2. Rapoarte, procente si proportii: prezentarea continuturilor**
- 3. Fise de lucru pentru exersarea notiunilor invatate**
- 4. Exercitii si probleme pentru olimpiadele scolare (cu rezolvari partiale)**
- 5. Exercitii si probleme recapitulative**
- 6. Test de verificare**

COMPETENȚE GENERALE

1. Identificarea unor date și relații matematice și corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite
2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice
3. Utilizarea algoritmilor și a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situații concrete
4. Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situații concrete și a algoritmilor de prelucrare a acestora
5. Analiza și interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situații-problemă
6. Modelarea matematică a unor contexte problematice variate, prin integrarea cunoștințelor din diferite domenii

VALORI ȘI ATITUDINI

- Dezvoltarea unei gândiri deschise și creative; dezvoltarea inițiativei, independenței în gândire și în acțiune pentru a avea disponibilitate de a aborda sarcini variate
- Manifestarea tenacității, perseverenței, capacității de concentrare și a atenției distributive
- Dezvoltarea spiritului de observație
- Dezvoltarea simțului estetic și critic, a capacității de a aprecia rigoarea, ordinea și eleganța în arhitectura rezolvării unei probleme sau a construirii unei teorii
- Formarea obișnuinței de a recurge la concepte și metode matematice în abordarea unor situații cotidiene sau pentru rezolvarea unor probleme practice
- Formarea motivației pentru studierea matematicii ca domeniu relevant pentru viața socială și profesională

RAPOARTE SI PROPORȚII

COMPETENTE SPECIFICE

1. Identificarea rapoartelor, proporțiilor și a mărimilor direct sau invers proporționale în enunțuri diverse
2. Reprezentarea unor date sub formă de tabele sau de diagrame statistice în vederea înregistrării, prelucrării și prezentării acestora
3. Alegerea metodei adecvate de rezolvare a problemelor în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale
4. Caracterizarea și descrierea mărimilor care apar în rezolvarea unor probleme prin regula de trei simplă
5. Analizarea unor situații practice cu ajutorul rapoartelor, procentelor sau proporțiilor
6. Rezolvarea cu ajutorul rapoartelor și proporțiilor a unor situații-problemă și interpretarea rezultatelor

CONTINUTURI

1. Rapoarte; procente; probleme în care intervin procente
2. Proporții; proprietatea fundamentală a proporțiilor, aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporție
3. Proporții derivate
4. Mărimi direct proporționale; regula de trei simplă
5. Mărimi invers proporționale; regula de trei simplă
6. Elemente de organizare a datelor; reprezentarea datelor prin grafice; probabilități

În această unitate, elevii învață noțiunile de:

- ◆ Raport-cu aplicații în calcularea probabilității realizării unui eveniment, a titlului unui aliaj, a concentrației unei substanțe și a determinării scării unui plan.
- ◆ Procent-cu aplicații în probleme de aflare a $p\%$ dintr-un număr, aflarea unui număr când cunoaștem $p\%$ din el și calculul raportului procentual.
- ◆ Proporție-cu referire la proprietatea fundamentală a proporției, aflarea unui termen necunoscut al unei proporții, proporții derivate, șir de rapoarte egale.

Elevii vor participa la rezolvarea de aplicații individuale și de grup, cu grad de dificultate progresiv și diferențiat în funcție de stilurile de învățare și de nivelul de înțelegere orientate pe:

-identificarea de probleme în care intervin tipurile de rapoarte învățate (probabilitate, titlul unui aliaj, concentrația unei substanțe, scara unui plan);

-găsirea de probleme din viața reală rezolvabile cu ajutorul procentelor, realizarea unor reprezentări prin grafice care să se exprime aceste procente;

-identificarea unor situații-problemă care pot fi transcrise în limbaj matematic, utilizând calculul algebric pentru determinarea unui termen necunoscut al unei proporții.

Elevii vor fi capabili:

-să rezolve probleme în care intervin calcularea probabilității realizării unui eveniment;

-să calculeze titlul unui aliaj;

-să determine concentrația unei substanțe;

-să determine scara unui plan;

-să afle $p\%$ dintr-un număr rațional;

-să afle un număr rațional când se cunoaște $p\%$ din el;

-să calculeze un raport procentual;

-să afle un termen necunoscut dintr-o proporție;

-să formeze dintr-o proporție dată, proporții derivate pe care să le aplice în rezolvarea problemelor;

-să afle un termen necunoscut dintr-un șir de rapoarte egale, aplicând proprietățile șirului de rapoarte egale;

RAPOARTE SI PROPORȚII

1.RAPOARTE

Fiind date doua numere , ne punem intrebarea de cate ori se cuprinde unul din numere in celalalt sau cu cat trebuie sa inmultim unul din numere pentru a obtine celalalt numar. De exemplu 2 se cuprinde de 3 ori in 6. Numarul 3 este catul dintre 6 si 2. Acest cat scris sub forma $\frac{6}{2}$ il vom numi raport.Deci:

Raportul este o expresie de forma $\frac{a}{b}$, unde a si b sunt numere ; a si b se numesc termenii raportului, b fiind diferit de zero.

Valoarea raportului se obtine efectuand catul a :b.

Exemplu. Raportul $\frac{2}{5}$ al numerelor 2 si 5 are ca valoare numarul rational $\frac{2}{5}$ care poate fi exprimat si prin fractia zecimala 0,4.

Observatii:

1.Raportul masurilor a doua marimi de acelasi fel se face dupa ce marimile se masoara la aceeasi unitate de masura. Acest raport nu depinde de unitatea de masura folosita.

2.De multe ori se defineste raportul a doua marimi care nu sunt de acelasi fel.De exemplu, viteza unui mobil este raportul dintre distanta parcursa de mobil si timpul in care mobilul parcurge distanta respectiva.

Rapoarte aplicate in probleme practice

1.1 Probabilitate

Numim probabilitatea realizarii unui eveniment A raportul dintre numarul cazurilor favorabile realizarii evenimentului si numarul cazurilor posibile ale experientei.

$$P(A) = \frac{\text{nr.caz.favorabile}}{\text{nr.caz.posibile}}$$

Exemplu:Intr-o cutie sunt 8 bile albe si 2 bile negre. Radu extrage la intamplare o bila.Care este probabilitatea ca bila extrasa sa fie alba? Dar neagra?

Rezolvare:

$$P_a(A) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} ; P_n(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

1.2 Titlul unui aliaj

Numim titlul unui aliaj raportul dintre masa metalului pretios si masa aliajului.

$$T = \frac{m}{M}$$

Exemplu: Un aliaj contine 812 g de aur si 1182 g de cupru.Care este titlul aliajului?

Rezolvare: Masa aliajului este $M=812+1188=2000$ g, masa aurului este $m=812$, iar titlul aliajului este

$$T = \frac{m}{M} = \frac{812}{2000} = 0,406.$$

1.3 Concentratia unei solutii

Numim concentratia unei solutii raportul dintre masa substantei care se dizolva si masa solutiei.

Exemplu: Intr-un vas se afla o solutie de sare in apa. Masa solutiei este de 120g, iar cea a sarii de 9,6g. Care este concentratia solutiei?

$$\text{Rezolvare: Concentratia} = \frac{m.\text{subst.}}{m.\text{solutie}} = \frac{9,6}{120} = \frac{96}{1200} = 0,08.$$

1.4 Scara unui desen

Fie A si B doua localitati reprezentate pe o harta. Raportul dintre distanta masurata pe desen intre cele doua localitati si distanta masurata pe teren (in realitate) este scara desenului.

$$S = \frac{\text{dist.desen}}{\text{dist.teren}}.$$

Exemplu :Distanta Bucuresti-Baia Mare este de 594 km. Distanta masurata pe o harta este de 4,5 cm. Aflati scara hartii.

$$\text{Rezolvare :Scara hartii este } S = \frac{4,5}{594 \times 100000} = \frac{45}{594 \times 1000000} = \frac{1}{13200000}.$$

Se observa ca cele doua marimi se masoara cu aceeasi unitate de masura (cm).

PROCENTE

Vom conveni sa folosim pentru $\frac{1}{100}$ notatia 1%. Citim "1 la suta" .Analog vom conveni

ca: p% inseamna $\frac{p}{100}$ (p ∈ Q si p ≥ 0).

Exemple: 10% inseamna 0,1;
25% inseamna 0,25;
100% inseamna 1;
7,2% inseamna 0,072.

Exemple practice:

1.Cand spunem "Sfecla de zahar contine 15% zahar" intelegem ca in 100 de kg de sfecla se gasesc 15 kg de zahar, in 200 de kg de sfecla se gasesc 30 de kg de zahar etc .

2.Sa consideram 96g de apa in care am dizolvat 4g de sare.Am obtinut 100g solutie de

sare in apa.Avem: $\frac{\text{cant.sare}}{\text{cant.solutie}} = \frac{4}{100}$.

Spunem : "Concentratia acestei solutii de sare in apa este de 4%".

Cata sare exista in 1250g de solutie cu concentratia de 4%?

Vom calcula 4% din 1250g, adica $\frac{4}{100}$ din 1250.Obtinem 1250=50g de sare.

Definitie:

Un raport de forma $\frac{p}{100}$ (p ∈ Q, p ≥ 0) se numeste raport procentual.

1. Aflarea a p% dintr-un numar dat

Exemplu :Un muncitor produce intr-o luna 900 piese de acelasi fel. In prima saptamana realizeaza 26% din numarul de piese. Cate piese a realizat in prima saptamana?

Rezolvare :1% din productia realizata intr-o luna este de 100 de ori mai mica decat 900 de piese, adica este egala cu $\frac{900}{100}$ piese. 26% din productia realizata intr-o luna este de 26 de

ori mai mare decat decat 1% din productia realizata intr-o luna, adica $26 \cdot \frac{900}{100} = \frac{26}{100} \cdot 900$, deci 234 de piese.

Astfel, pentru a determina 26% din 900 de piese, calculam $\frac{26}{100} \cdot 900$.

In general, pentru a determina p% dintr-un numar se inmulteste numarul cu $\frac{p}{100}$.

Deci p% din a este $\frac{p}{100} \cdot a$.

2. Aflarea unui numar cand cunoastem p% din el

Exemplu :20% din elevii unei clase au obtinut nota 10 la teza la matematica. Cati elevi sunt in clasa stiind ca 6 elevi au luat nota 10?

Rezolvare: Notam cu x numarul elevilor clasei.

Scriem: $\frac{20}{100} \cdot x = 6$. Deci $x = \frac{6 \cdot 100}{20} = 30$ de elevi.

In general, daca cunoastem ca p% dintr-un numar necunoscut x este b, adica daca stim ca $\frac{p}{100} \cdot x = b$, putem afla $x = \frac{100 \cdot b}{p}$.

3. Calculul raportului procentual

Exemplu: Intr-un magazin, din 1740 de obiecte, 1653 sunt de calitate superioara, iar in alt magazin, din 2425 de obiecte de acelasi tip, 2328 sunt de calitate superioara. Din ce magazin ati cumpara si de ce?

Rezolvare :Scriem rapoartele: $\frac{1653}{1740}$, respectiv $\frac{2328}{2425}$.

Citim: "Din 1740 de obiecte, 1653 sunt de calitate superioara, respectiv din 2425 de obiecte, 2328 sunt de calitate superioara." Dar, pentru a face mai usor comparatia, vom transforma fiecare din rapoartele de mai sus in rapoarte procentuale. Astfel:

$\frac{1653}{1740} = \frac{x}{100}$, respectiv $\frac{2328}{2425} = \frac{y}{100}$. Obtinem $x=95$ si $y=96$.

Deci, in primul magazin, din 100 de obiecte, 95 sunt de calitate superioara; in al doilea magazin, din 100 de obiecte, 96 sunt de calitate superioara. Atunci, indicat este sa cumparam de la al doilea magazin.

Se observa astfel utilitatea transformarii unui raport oarecare in raport procentual.

In general, daca vrem sa aflam cat la suta dintr-un numar a este numarul b, scriem:

$$\frac{x}{100} \cdot a = b, \text{ deci } x = \frac{100 \cdot b}{a}.$$

Alte rapoarte folosite in practica

Rarortul $\frac{1}{1000}$ se noteaza 1‰. Citim “unu la mie “. Calculele se fac la fel ca la procente.

Exemple: Cand spunem ca o solutie are 6‰ g de sare inseamna ca in 1000 de g de solutie se afla 6 g de sare.

PROPORTII

Fiind date doua segmente, unul avand lungimea de 10 cm si celalalt avand lungimea de 6 cm, raportul dintre lungimea primului segment si lungimea celui de al doilea segment este $\frac{10}{6}$.

Daca lungimea fiecaruia din cele doua segmente este masurata cu o unitate de masura egala cu 2 cm, atunci lungimea primului segment este de 5 um, iar a celui de al doilea segment de 3 um.

Deci raportul celor doua lungimi este de $\frac{5}{3}$. Cele doua rapoarte sunt egale, pentru ca exprima

acelasi lucru, anume raportul dintre lungimile celor doua segmente date. Deci : $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.

O astfel de egalitate o vom numi proportie.

Egalitatea a doua rapoarte se numeste proportie. Fiind data proportia $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

a,b,c,d se numesc termenii proportiei ; a si d sunt extremii, iar b si c sunt mezii.

Proprietatea fundamentala a proportiilor

In orice proportie, produsul mezilor este egal cu produsul extremilor.

Dupa cum am observat si din exemplul precedent, prin amplificarea sau simplificarea unui raport

se obtin proportii, adica $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, b \neq 0, c \neq 0$.

Aflarea unui termen necunoscut dintr-o proportie

Completati urmatorul tabel :

Scara	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{1000}$		$\frac{1}{200000}$
Lungimea pe harta	2,8 cm		5,5 cm	
Lungimea reala		1200 m	10 km	80 km

Cum ati procedat ?

Aplicand proprietatea fundamentala a proportiilor, putem afla termenul necunoscut al unei proportii. Astfel :

- Daca $\frac{x}{a} = \frac{b}{c} \Rightarrow x = \frac{a \cdot b}{c}$;
- Daca $\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$;

- Daca $\frac{a}{x} = \frac{b}{c} \Rightarrow x = \frac{a \cdot c}{b}$;
- Daca $\frac{a}{b} = \frac{x}{c} \Rightarrow x = \frac{a \cdot c}{b}$.

Proportii derivate

Fiind data proportia $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $a, b, c, d \neq 0$, din ea se pot obtine :

-proportii derivate cu aceeasi termeni

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ (schimbând mezii, respectiv extremii între ei) sau $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
(inversând rapoartele).

-proportii derivate cu termeni schimbati . Efectand raportul dintre suma (diferenta) numaratorilor si suma (diferenta) numitorilor obtinem un raport egal cu fiecare din cele doua rapoarte ale proportiei date.

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}, \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}, \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}, \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

Sir de rapoarte egale

Egalitatea mai multor rapoarte se numeste sir de rapoarte egale.

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n} \text{ este un sir de rapoarte egale.}$$

Intr-un sir de rapoarte egale fiecare raport este egal cu raportul dintre suma numaratorilor si suma numitorilor, adica :

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

Fise de lucru pentru exersarea notiunilor invatate.

Fișă de lucru nr.1

1. În penarul Mihaelei sunt 3 creioane galbene și 2 creioane albastre. Care este probabilitatea ca luând la întâmplare un creion acesta să fie galben?
2. Se face un aliaj topind la un loc 16 g aur ce 234 g cupru. Care este titlul aliajului?
3. Într-un vas se află soluție de apă cu sare. Dacă cantitatea de sare din soluție este de 20 g, iar masa soluției este 400 g, aflați concentrația soluției.

Fișă de lucru nr.2

1. Aruncăm un zar. Care este probabilitatea apariției unei fețe cu un număr par de puncte?
2. Ce cantitate de aur se află în 840 g de aliaj cu titlul de 0,650 ?
3. Într-un vas se află 12 litri de soluție de apă cu sare având concentrația de 8%. Prin fierbere după 5 ore s-au evaporat 4 litri de apă. Care este concentrația soluției rămasă în vas?
4. Scara unui desen este de 1:50. Care este distanța pe desen ce reprezintă o distanță reală de 9m ?

Fișă de lucru nr.3

11. Dintr-un lot de 80 piese, 76 nu sunt defecte. Care este probabilitatea ca luând la întâmplare o piesă aceasta să fie defectă?
2. Se topesc la un loc 200 g de aliaj cu titlul de 0,480 cu 300 g de aur pur. Care va fi titlul noului aliaj?
3. În două vase se află soluții (oțet + apă). Concentrația soluției din primul vas este $\frac{3}{5}$, iar din al doilea de $\frac{4}{5}$. Se amestecă 10 litri de soluție din primul vas cu 4 litri de soluție din al doilea vas. Care este concentrația soluției obținute?
4. Un teren dreptunghiular are lungimea de 120 m și lățimea de 64 m. Desenați terenul la scara de 1 : 4000.

Fișă de lucru nr.4

1. Fie raportul $\frac{10}{6}$. Formați proporții astfel:
 - a) simplificând raportul dat cu 2;
 - b) amplificând raportul det cu 3.
2. Formați câte o proporție cu numerele 3, 4, 6, 2.
3. Fie proporția $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$. Să se scrie 3 proporții derivate cu aceiași termeni și 3 proporții derivate cu termeni schimbați.

Fișa de lucru nr.5

1. Să se afle termenul necunoscut din următoarele proporții:

a) $\frac{x}{4} = \frac{11}{2}$ b) $\frac{5}{x} = \frac{4}{9}$.

2. Știind că raportul a două numere este $\frac{2}{7}$ și diferența lor este 50, aflați numerele.

3. Știind că $\frac{2x + 5y}{5y} = \frac{13}{10}$, să se calculeze $\frac{x}{y}$.

Fișa de lucru nr.6

1. Știind că $\frac{a}{0,2} = \frac{0,24}{b}$, să se calculeze 100ab.

2. Se dă proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Să se arate că $\frac{5a + 2b}{13a + 7b} = \frac{5c + 2d}{13c + 7d}$ este o proporție.

3. Aflați numerele a, b, c, știind că $\frac{2a}{3} = \frac{3b}{5} = \frac{5c}{4}$ și a+b+c=119.

Fișa de lucru nr.7

1. În tabelul următor sunt specificate sumele depuse de o persoană la cele trei bănci. Căutați pe internet la adresa <http://www.dobanzi.ro/>, dobânzile anuale acordate persoanelor fizice și apoi completați tabelul.

Banca	B.C.R.	B.R.D.	BancPost
Suma depusă	120 RON	150 RON	300 RON
Dobânda pe an în procente			
Suma încasată după un an			

2. Se da tabelul urmator :

Clasa	Număr de elevi	Procente
A V-a		
A VI-a		
A VII-a		
A VIII-a		

Cautati pe internet la adresa scolii noastre si completati coloana a doua cu numarul de elevi din fiecare clasa de gimnaziu din Colegiul National „ Nichita Stanescu „.

Completați coloana a treia din tabel exprimând în procente raportul dintre numărul de elevi din fiecare clasă și numărul total de elevi.

3. Venitul lunar net (fără impozit) al unei familii este 7500 um (unități monetare), iar cheltuielile lunare sunt: 20% chiria, 15% transportul, 40% hrana, 7% îmbrăcăminte, 11% energia electrică, 7% diverse cheltuieli. Completați următorul tabel cu sumele aferente.

Cheltuieli în um	Chirie	Transport	Hrană	Îmbrăcăminte	Energie	Diverse

Realizati un grafic care sa reprezinte datele din tabel.

Venitul lunar net (fără impozit) al unei alte familii este tot de 7500 um (unități monetare), iar cheltuielile lunare sunt: 1200 um chiria, 1000 um transportul, 3500 um hrana, 750 um imbracamintea, 750 um energia electrica, 300 um diverse cheltuieli. Completati urmatorul tabel:

Cheltuieli în %	Chirie	Transport	Hrană	Îmbrăcăminte	Energie	Diverse

4. Rezultatele obtinute la teza la matematica pe semestrul I de catre elevii clasei a V-a sunt:

Note	Numar de elevi	Procent
1,00-2,00	0	
2,00-3,00	0	
3,00-4,00	0	
4,00-5,00	2	
5,00-6,00	4	
6,00-7,00	5	
7,00-8,00	5	
8,00-9,00	6	
9,00-9,99	5	
10	3	
TOTAL		

Completati coloana a treia din tabel si realizati un grafic care sa reprezinte datele din tabel.

5. Pe eticheta unui produs scrie $750\text{ g} \pm 2\%$. Cum interpretati aceasta formulare?

Exercitii si probleme pentru olimpiadele scolare (rezolvari pariale)

Rapoarte

1. Intra o scoala, in luna mai 2008, raportul fete/baieti era de 2 : 3. In prezent, raportul este de 1 : 2. Numarul baietilor a ramas neschimbat, iar numarul fetelor este cu 10 mai mic. Sa se afle cate fete si cati baieti erau in scoala in luna mai 2008.

2. Intra o cutie se introduc mai multe cartonase identice pe care sunt imprimate cate doua, trei sau patru puncte, numarul punctelor de pe cartonase fiind de 39 in total. Cartonasele cu doua si respectiv trei puncte totalizeaza 31 de puncte, iar cele cu trei si patru puncte totalizeaza 23 de puncte.

a) care este probabilitatea ca, la extragerea din cutie a unui cartonasa, acesta sa aiba imprimat pe el trei puncte?

b) care este probabilitatea ca, la extragerea din cutie a unui cartonasa, acesta sa nu aiba imprimat pe el trei puncte?

3. Pe o harta cu scara $\frac{1}{10^6}$ distanta dintre doua orase A si B este reprezentata printr-un segment cu lungimea de 6cm. Ce lungime va avea segmentul care va reprezenta distanta dintre aceleasi orase pe o harta cu scara de $\frac{1}{2^6 \cdot 5^5}$? Exprimiti in kilometri distanta, pe teren, dintre aceste orase.

Rezolvare :

In teren distanta dintre orasele A si B este de ...cm=...m=...km.

Pe o harta cu scara de $\frac{1}{2^6 \cdot 5^5}$, distanta dintre orasele A si B este de $6 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{2^6 \cdot 5^5}$
=...=30 cm.

Procente

1. Dupa o marire de pret cu 20% a unui obiect, s-a efectuat o reducere cu 16%. Aflati ce procent din pretul initial reprezinta noul pret.

Rezolvare :

Fie x pretul initial. Marirea cu 20% conduce la noul pret $... = \frac{120}{100} x$. Efectuand reducerea

de 16%, obtinem ultimul pret $... = \frac{100,8}{100} x$. Deci noul pret reprezinta ... din pretul initial.

2. Trei vanzatori au caiete cu acelasi pret. Primul a marit pretul cu 20% si apoi l-a micorat cu acelasi procent, al doilea a micorat mai intai pretul cu 20% si abia apoi l-a marit cu acelasi procent iar al treilea a lasat pretul neschimbat. De la care vanzator ai cumpara acum si de ce?

3. Numarul elevilor unei clase nu este mai mic decat 20 si nici mai mare decat 30. La inceputul anului scolar, 60% din numarul elevilor clasei sunt baieti. Pe parcursul anului scolar mai vin 7 elevi astfel incat la sfarsitul anului scolar numarul fetelor este egal cu numarul baietilor. Cati elevi au fost in clasa la inceputul anului scolar?

Rezolvare :

Fie x numarul elevilor la inceputul anului scolar. Atunci sunt ... baieti si ... fete. Vin a fete si 7-a baieti. Atunci $\frac{2}{5}x + a = \frac{3}{5}x + 7 - a \Rightarrow x = 10a - 35$, adica $20 \leq 10a - 35 \leq 30 \Rightarrow a = \dots$

4. Pretul unui obiect se micsoareaza cu 20%. Cu cat la suta trebuie sa se mareasca noul pret pentru a se ajunge la pretul initial?

5. Intr-o clasa de liceu numarul baietilor este 80% din numarul fetelor. Ce procent din numarul baietilor reprezinta numarul fetelor?

6. Obiectele A si B au preturile direct proportionale cu 3 si 5, iar obiectele B si C au preturile invers proportionale cu 3, respectiv 4.

- Ordonati cele trei obiecte dupa pret (crescator);
- Daca pretul cel mai mare este micsoorat cu 58%, ce trebuie facut cu pretul cel mic , pentru ca pretul mijlociu sa reprezinte media aritmetia a preturilor modificate?;
- Aflati preturile initiale, stiind ca cel mai mic pret dupa modificarile de la b) , exprimat in lei, este cel mai mic numar natural cu exact 4 divizori.

7. Suma a trei numere naturale este 87. Daca se mareasce primul cu 150% din el, al doilea se micsoareaza cu 25% din el, iar al treilea se micsoareaza cu 5, atunci numerele obtinute devin egale. Sa se afle cele trei numere.

8. In clasele a VI-a, a VII-a si a VIII-a dintr-o scoala sunt in total 370 de elevi. 30% din elevii clasei a VI-a au plecat in excursie. Numarul celor de clasa a VI-a care au plecat in excursie reprezinta 20% din numarul total al elevilor din clasa a VII-a si 25% din numarul elevilor din clasa a VIII-a. Cati elevi sunt in clasa a VI-a? Dar in clasa a VII-a?

Rezolvare:

Notam cu a , b si c numarul elevilor din clasele a VI-a, a VII-a si a VIII-a . Avem

$a+b+c=370$ si $\frac{30}{100}a = \frac{20}{100}b = \frac{25}{100}c$. Folosind proportii derivate ..., gasim ca $a=100$, $b=...$, $c=...$

9. Pretul unui obiect s-a micsoorat cu 25%, apoi s-a marit de cinci ori consecutiv cu $p\%$, de fiecare data.

- Determinati p , stiind ca pretul final al obiectului a fost de 24 de ori mai mare decat cel initial;
- Daca dupa a doua scumpire, pretul este de 900 de lei, cat era acesta dupa prima scumpire, in conditiile punctului a)?

Rezolvare :

Fie x pretul initial . Dupa ieftinire pretul devine $\frac{3x}{4}$, iar prin 5 mariri consecutive cu $p\%$

devine $24x = \left(\frac{100+p}{100}\right)^5 \cdot \frac{3x}{4} \Rightarrow \dots \Rightarrow p = 100$.

10. Sa se afle x stiind ca :

$$\frac{1}{2} \% \text{ din } \left(\frac{2}{3} \% \text{ din } \left(\frac{3}{4} \% \text{ din } \left(\dots \left(\frac{n}{n+1} \% \text{ din } x \right) \dots \right) \right) \right) = \frac{1}{100^n (n+1)} .$$

Rezolvare :

$$\frac{1}{200} \cdot \frac{2}{300} \cdot \frac{3}{400} \cdot \dots \cdot \frac{n}{(n+1) \cdot 100} \cdot x = \frac{1}{100^n (n+1)} . \text{ Deci prin simplificare obtinem}$$

$$\frac{1}{(n+1) \cdot \dots} = \frac{1}{100^n (n+1)} \Rightarrow x=1.$$

Proportii. Sir de rapoarte egale

1. Fie a, b, c cifre nenule.

a) Demonstrati ca $\frac{\overline{ab+c}}{\overline{bc+a}} = \frac{\overline{bc+a}}{\overline{ca+b}} = \frac{\overline{ca+b}}{\overline{ab+c}}$ daca si numai daca a=b=c.

b) Demonstrati ca $\frac{\overline{ab+c}}{a} = \frac{\overline{bc+a}}{b} = \frac{\overline{ca+b}}{c}$ daca si numai daca a=b=c.

Rezolvare :

a)

$$\frac{\overline{ab+c}}{\overline{bc+a}} = \frac{\overline{bc+a}}{\overline{ca+b}} = \frac{\overline{ca+b}}{\overline{ab+c}} = \frac{10a+b+c}{10b+c+a} = \dots = \dots = \frac{12a+12b+12c}{12a+12b+12c} \Rightarrow 10a+b+c = 10b+c+a \Rightarrow \dots$$

Reciproca...

2. Consideram urmatorul sir de rapoarte egale in care valoarea comuna a rapoartelor este un numar natural, iar numerele a, b si x sunt numere naturale :

$$\frac{2a+b}{a-1} = \frac{2x+1}{x-2} = \frac{4a+b}{a+3}. \text{ Aflati } a, b, x.$$

Rezolvare :

$$\frac{2x+1}{x-2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in \{3, 7\}.$$

Daca x=3, atunci a=... si b=.... Daca x=7, atunc a=... si b=....

3. Sa se determine numerele rationale a, b, c, numerele naturale pare k si numerele n care satisfac conditiile : a+b+c=12 si $\frac{ak+1}{a+k} = \frac{bk+2}{b+k+1} = \frac{ck+3}{c+k+2} = n$.

4. Fie numerele naturale a, b, c, d. Stiind ca $\frac{3a+b}{3c+d} = \frac{4a+b}{4c+d} = \frac{5a+b}{5c+d} = 6$, sa se calculeze $\frac{7a+b}{7c+d}$.

5. Care este suma numerelor naturale a, b, c care satisfac relatia : $\frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} = \frac{2001}{2006}$.

Rezolvare :

$$\frac{2001}{2006} = \frac{1}{\frac{2006}{2001}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{2001}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2001}{5}}} = \dots \Rightarrow a = 1, b = 400.$$

6. Aflati x din proportia : $\frac{2^{2005} + 2^{2006}}{2^{2004} + 2^{2005}} = \frac{2x}{9^{15} : 27^{10}}.$

7. Fie a, b, c numere naturale nenule astfel incat $\frac{a^2 + bc}{a^2} = \frac{b^2 + ca}{b^2} = \frac{c^2 + ab}{c^2}.$

Demonstrati ca :

a) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca ;$

b) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc ;$

c) $3^{2005} (a^{2006} + b^{2006} + c^{2006}) = (a + b + c)^{2006}.$

Rezolvare :

Daca din numaratori scadem numitorii,

obtinem : $\frac{bc}{a^2} = \frac{ca}{b^2} = \frac{ab}{c^2} \Rightarrow \frac{abc}{a^3} = \frac{abc}{b^3} = \frac{abc}{c^3} \Rightarrow \dots \Rightarrow a = b = c$

8. Sa se determine toate numerele \overline{abcd} pentru care $\frac{\overline{abcd}}{141} = \frac{\overline{bcda}}{299} = \frac{\overline{cdab}}{768} = \frac{\overline{dabc}}{1014}.$

Rezolvare :

$$\frac{\overline{abcd}}{141} = \frac{\overline{dabc}}{1014} \Rightarrow \frac{\overline{dabc}}{\overline{abcd}} = \frac{1014}{141} > 7 \Rightarrow a = 1. \text{ Conform relatiei din ipoteza, trebuie ca}$$

$a < b < c < d$, iar cum $a = 1$, inseamna ca $b \geq 2, c \geq 3, d \geq 4$. Atunci

$\overline{abcd} \geq 1234, \overline{dabc} \geq 7 \cdot 1234 = 8638$. Cum $a = 1$, trebuie ca $\overline{d1bc} \geq 8638 \Rightarrow d = 9$. Din

$1014 \cdot \overline{1bc9} = 141 \cdot \overline{91bc} \Rightarrow U(4 \cdot 9) = U(1 \cdot c) \Rightarrow c = 6$. Deci ..., atunci $b = 2$.

9. Demonstrati ca daca numerele naturale a, b, c verifica relatia :

$$\frac{2010a - 1000b}{2010a + 10b} = \frac{2010b - 1000c}{2010b + 10c} = \frac{2010c - 1000a}{2010c + 10a}, \text{ atunci } a = b = c.$$

10. Sa se determine numerele naturale x, y si z stiind ca : $\frac{x^2}{9} = \frac{y^3}{16} = \frac{z^4}{4}$ si

$$x^6 \cdot y^4 \cdot z^3 = 3^6 \cdot 2^{17}.$$

Rezolvare :

Din $9y^3 = 16x^2 \Rightarrow 9 \text{ divide } x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{y^3}{16} = \frac{z^4}{4} = t \in N$. Din ultima relatie deducem

ca $x^2 = 9t, y^3 = 16t, z^4 = 4t$. Egalitatea $x^6 \cdot y^4 \cdot z^3 = 3^6 \cdot 2^{17}$ este echivalenta cu

$$(x^2)^3 \cdot (y^3)^4 \cdot (z^4)^9 = 2^{204} \cdot 3^{72}. \text{ Din cele doua egalitati, obtinem } t = \dots, \text{ deci } x = \dots, y = \dots, z = \dots$$

Rapoarte, procente si proportii Exercitii si probleme recapitulative

1. Un mobil parcurge 100 km in 2 ore. Viteza medie a mobilului este de ... km/ora.
2. 25% din 300 este egal cu...
3. $\frac{x}{3} = \frac{5}{2}$. x este egal cu...
4. Dintr-un lot de 80 de piese 5 sunt defecte. Probabilitatea ca alegand la intamplare o piesa, aceasta nu sa fie defecta este egala cu ...
5. Ce cantitate de aur se afla in 840 g de aliaj cu titlul de 0,650 ?
6. Care dintre urmatoarele propozitii reprezinta o proportie ?
 a) $\frac{3^{2010} + 3^{2009}}{3^{2010} - 3^{2009}} = \frac{2^{101}}{2^{100}}$; b) $\frac{2^{100}}{2^{50}} = \frac{3^{100}}{3^{50}}$; c) $\frac{3^{100}}{2^{100}} = \frac{6^{100}}{4^{100}}$.

7. Completati tabelul urmatoar :

Nota	Numar de elevi	Procentul
1	0	
2	0	
3	2	2%
4	10	
5	15	
6	15	
7	20	
8	18	
9	8	
10		

8. Stiind ca $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{t}{d}, \frac{x}{a} = 5$, calculati x+y+z+t, daca a+b+c+d=110.

Test de verificare
Rapoarte, procente si proportii

(5 p) 1. Raportul dintre lungimea si latimea unui dreptunghi este egal cu 3, iar lungimea este egala cu 30 cm. Latimea este egala cu...

(5 p) 2. 10% din 200 este egal cu..

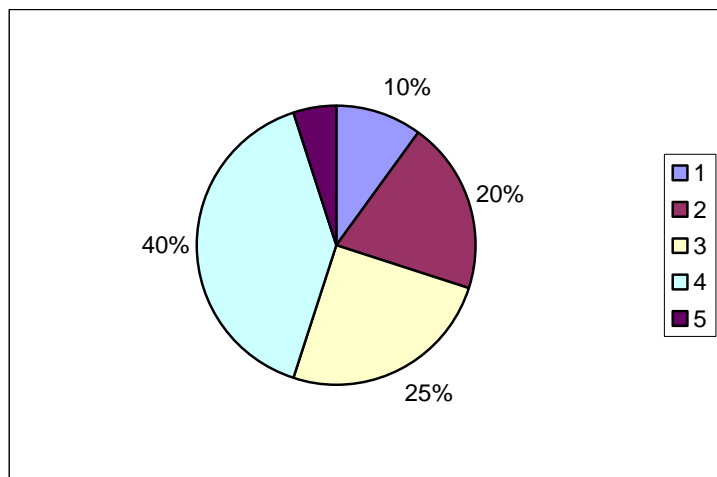
(5 p) 3. $\frac{x}{4} = \frac{10}{3}$. x este egal cu...

(5 p) 4. Aruncam un zar. Care este probabilitatea aparitiei unei fete cu un numar impar de puncte ?

(5p) 5. Ce cantitate de argint se afla in 800 g de aliaj cu titlul de 0,375 ?

(5 p) 6. Un patrat are latura de lungime 1 km. Desenati patratul la scara $\frac{1}{50000}$.

(5 p) 7. Completati urmatoarea diagrama :



(15 p) 8. Pretul unui obiect era de 200 lei. Obiectul s-a scumpit cu 20%, iar apoi s-a ieftinit cu 10 %. Care este noul pret?

(10 p) 9. Se da numarul $a = 2^{1990} - 2^{1989} - 2^{1988}$. Sa se afle x din proportia: $\frac{a}{x} = \frac{4^{993}}{0,25}$.

(15 p) 10. Aflati numerele x, y si z, stiind ca $\frac{x}{3} = \frac{y}{7} = \frac{z}{11}$ si $x+2y+3z=200$.

(15 p) 11. Completati tabelul urmator:

Scara	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{1000}$		$\frac{1}{200000}$
Lungimea pe harta	2,8 cm		5,5 cm	
Lungimea reala		1200 m	10 km	80 km

Se acorda 10 puncte din oficiu.

BIBLIOGRAFIE

- 1. C.P. Popovici, I.C. Ligor , Matematica- Manual pentru clasa a VI-a , Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti ;**
- 2. G. Turcitu, C. Basarab, I. Rizea, M. Duncea, I. Chiriac, P. Ciungu , Matematica- Manual pentru clasa a VI-a, Editura Radical ;**
- 3. D. Branzei, D. Zaharia, M. Zaharia- Aritmetica, algebra, geometrie- clasa a VI-a, Editura Paralela 45 ;**
- 4. D. Branzei (coord.), Matematica-olimpiade si concursuri scolare, clasele IV-VI, Editura Paralela 45 ;**
- 5. D. Branzei, D. Golesteanu, M. Golesteanu, Matematica in concursurile scolare, Editura Paralela 45 ;**
- 6. Intel Teach- Instruirea in societatea cunoasterii, CD cu resurse curriculare**
- 7. edu.ro**