ASUPRA PARADOXULUI OBTUZITĂȚII

Miron Oprea

Se ştie că ***triunghiul*** reprezintă figura geometrică fundamentală atât în geometrie cât şi în întreaga matematică. Multiplele sale aplicații practice la calculul distanțelor pe suprafața pământului (triangulația), a ariilor pe suprafața pământului, a volumelor unor corpuri etc., a determinat o atenție specială din partea matematicienilor, informaticienilor, atsronomilor, fizicienilor etc. Mai mult, în creştinism, ***Sfânta Treime*** (Tatăl-Fiul-Sf. Duh) este reprezentată printr-un triunghi, în interiorul căruia se află un ***ochi*** , care semnifică că ***totul*** există şi se poate înțelege, ***privind*** prin acest triunghi. Încă din Antichitate , matematicienii au dat o atenție deosebită formei de triunghi înțelegând prin acesta ***placa*** *triunghiulară* cu toate punctele sale. În decursul veacurilor,
s-au pus în evidență o serie de linii şi de puncte importante legate de triunghi, ajungându-se în secolele XIX-XX la o veritabilă geometrie a triunghiului. S-au scris cărți cu titlul ***Geometria triunghiului***, cum este spre exemplu cea elaborată de celebrul matematician român Traian Lalescu (1882-1929), dar tipărită postum (1937) în limba franceză cu o prefață de către G.Țițeica.

Pentru ***triunghi***, matematicienii au avut şi au încă un adevărat cult- ***forma de triunghi*** joacă un rol deosebit în întreaga gândire matematică.

Se ştie că elementele principale ale unui triunghi sunt ***laturile*** şi ***unghiurile*** şi că ***forma*** unui triunghi este determinată numai de unghiurile sale. Luând ca reper, ***unghiul drept***, triunghiurile se clasifică în trei forme: *ascuțitunghice* (toate cele trei unghiuri sunt mai mici de 90°), *obtuzunghice* (când triunghiul are un unghi mai mare de 90°) şi *dreptunghice* (când triungiul are un unghi de 90°).

Vom nota, ca de obicei, cele trei vârfuri cât şi mărimea unghiurilor triunghiului ABC cu A,B,C, iar laturile (corespunzătoare) cât şi mărimea lor respectiv cu a,b,c.

Pentru ca trei puncte A,B,C alese la întâmplare într-un plan (α) să formeze $\triangle$ ABC este necesar şi suficient să îndeplinească următoarele condiții: $(0<A<\pi;0<B<\pi;0<C<\pi;A+B+C=\pi)$ sau $(a<b+c;b<c+a;c<a+b)$ sau $(c<b<a;a<b+c)$.

Alegând la întâmplare trei puncte în plan, în dorința de a construi un ***triunghi oarecare*** (să nu fie dreptunghic sau isoscel), se constată că de cele mai multe ori, triunghiul rezultat este obtuzunghic. Să cercetăm mai îndeaproape, spre a găsi o explicație a acestui ***"aparent paradox"***.

Fie B şi C primele două puncte alese la întâmplare în planul (α) (Fig.1).

Prin construcția dreptelor: $(D_1)\perp BC$ (în B); $(D_2)\perp BC$ (în C) şi a cercului (Γ) de diametru BC, planul (α) se partiționează atsfel:

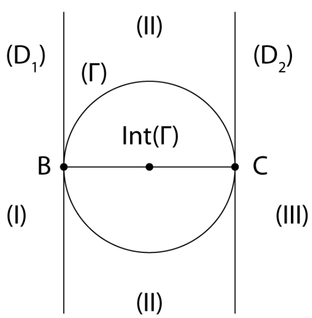


Fig. 1

$(\alpha)=(\mathrm{I})\bigcup(\mathrm{II})\bigcup(\mathrm{III})\bigcup int(\Gamma)\bigcup(D_1)\bigcup(D_2)\bigcup(..\Gamma...)\bigcup(BC)$ (opt mulţimi de puncte disjuncte)

Intuitiv se observă:

1) $A\in(\mathrm{I})\Rightarrow B>90^\circ$ ($\triangle ABC$ este obtuzunghic)

2) $A\in(\mathrm{III})\Rightarrow C>90^\circ$ ($\triangle ABC$ este obtuzunghic)

3) $A\in Int(\Gamma)\Rightarrow A>90^\circ$ ($\triangle ABC$ este obtuzunghic)

4) $A\in(\mathrm{II})\Rightarrow A<90^\circ, B<90^\circ, C<90^\circ$ ($\triangle ABC$ este ascutitunghic)

5) $A\in(D_1)\Rightarrow B=90^\circ$ ($\triangle ABC$ este dreptunghic)

$A\in(D_2)\Rightarrow C=90^\circ$ ($\triangle ABC$ este dreptunghic)

$A\in(\Gamma)\Rightarrow A=90^\circ$ ($\triangle ABC$ este dreptunghic)

6) $A\in(BC)\Rightarrow$ nu există $\triangle ABC$.

Rezultă (intuitiv) că sunt mult mai multe posibilităţi ca $\triangle ABC$ să fie obtuzunghic decât să fie ascuţitunghic. Ceva mai precis, observăm că $\triangle ABC$ are trei posibilităţi ($A>90^\circ$ sau $B>90^\circ$ sau $C>90^\circ$) să fie obtuzunghic şi numai o posibilitate ($A<90^\circ$ şi $B<90^\circ$ şi $C<90^\circ$) ca $\triangle ABC$ să fie ascuţitunghic.

Deoarece ne interesează *forma triunghiului* şi nu lungimile laturilor, atunci putem să ne rezumăm numai la triunghiurile înscrise într-un cerc dat.

Fie cercul (Γ) din Fig 2 pe care alegem la întâmplare trei puncte A,B,C ceea ce înseamnă o distribuţie de probabilitate uniformă pe cercul (Γ). Odată fixat vârful A al triunghiului, vârful B va fi ales pe unul din semicercurile determinate de diametrul AA'.

Pentru ca $\triangle ABC$ să fie ascuţitunghic, vârful C trebuie să aparţină "*arcului de acuitate*" $\overset{\frown}{A'B'}$, definit de diamtralele punctelor A şi B. În caz că $C\in\overset{\frown}{AB'}$ atunci $\triangle ABC$ este obtuzunghic ($A>90^\circ$). La fel dacă $C\in\overset{\frown}{A'B}$ atunci $\triangle ABC$ este obtuzunghic ($B>90^\circ$), iar dacă $C\in\overset{\frown}{A'B}$ atunci $\triangle ABC$ este obtuzunghic ($C>90^\circ$).

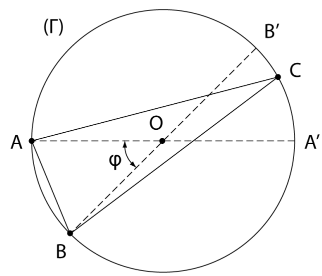


Fig. 2

După cum se observă, mărimea "*arcului de obtuzitate*" a $\triangle ABC$ este mult mai mare decât mărimea *arcului de acuitate* ceea ce înseamnă că numărul triunghiurilor obtuzunghice este mult mai mare decât numărul triunghiurilor ascuţitunghice înscrise în cercul (Γ) când vârfurile sunt alese la întâmplare. Prin alegerea la întâmplare a punctului B (pe unul din cele două semicercuri determinate de diametrul AA') s-a definit unghiul la centru φ, care este o variabilă aleatoare uniform distribuită pe intervalul $[0,\pi]$. Dacă C este ales la întâmplare pe (Γ), atunci probabilitatea condiţionată de alegerea lui B ca punctul C să aparţină "*arcului de* *acuitate"* $A'B'$ este $\varphi/2\pi$. Mediind poziția lui B cu densitatea de probabilitate uniformă $1/\pi$, se obține: $P\left(\Delta ABC = ascutitunghic\right) = \int_0^{\Pi} \frac{\varphi}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi}{\pi} = \frac{1}{4}$ si deci

$P(\Delta ABC = obtuzunghic) = \frac{3}{4}$, ceea ce atestă rezultatele de mai înainte obținute intuitiv.

În continuare vom da o altă modalitate (vezi [1]) de a calcula probabilitățile domeniilor de *acuitate* (D<) și *obtuzitate* (D〈) ale triunghiurilor obținute prin alegerea la întâmplare a vârfurilor. Pentru a înlătura dificultatea *infinității* planului, ne vom limita la un domeniu finit, urmând ca ulterior marginile sale să se îndepărteze la infinit. Odată fixat vârful A, nu reținem din plan, decât discul (D) de centru A și de rază R. Alegem la întâmplare punctul B în discul (D). Domeniile de *acuitate* (D<) și de *obtuzitate* (D<) împart discul (D) în două zone disjuncte $(D) = (D<) \bigcup (D\langle)$ așa ca în Fig.3. Dacă notăm $r = |AB| < R$ și $\cos\theta = r/R$, atunci se vede imediat că aria $\sigma(D<) = \frac{1}{2}\pi R^2 - (\theta - \sin\theta\cos\theta)R^2 - \frac{1}{4}\pi r^2$, iar aria medie în ipoteza că densitatea de probabilitate ρ a lui B este uniformă în (D), avem:

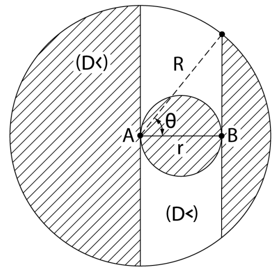


Fig. 3

$$\rho(r)dr = \frac{2\pi r}{\pi R^2}dr = \frac{2r}{R^2}dr.$$

Deci

$$\sigma_{medie}(D<) = \int_0^R \rho(r)\sigma(D<)dr = \frac{2}{R^2}\int_0^R r[\frac{1}{2}\pi R^2 - (\theta - \sin\theta\cos\theta)R^2 - \frac{1}{4}\pi r^2]dr$$

$$= \frac{1}{4}\pi R^2$$

De unde rezultă $P(D<) = \frac{\frac{1}{4}\pi R^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$, iar $P(D\langle) = \frac{3}{4}$

Se observă că această probabilitate este independentă de raza discului (D) și că așa zisul "*paradox al obtuzității*" este numai aparent.

Bibliografie:

[1] Jean-Marc Lévy-Leblond: « *Le triangle le plus quelonque* », Quadrature nr. 73, Paris.
[2] GaëOctavia : «*La recette du triangle quelconque* », Le triangle, HS 24.
[3] Jacques Lubczanski : « *Chroniques mathématiques* », Edité Cédic / Nathan.

O ÎNCADRARE PENTRU ŞIRUL ARMONIC

DR. DORIN MĂRGHIDANU, CORABIA
d.marghidanu@gmail.com

În acestă scurtă notă este pusă în evidenţă o dublă inegalitate pentru şirul armonic, din care rezultă apoi foarte uşor divergenţa sa şi a seriei armonice asociate .

Cuvinte cheie : *şir armonic , încadrare , divergenţă*
2000 Mathematics Subject Classification : 26D15

Reamintim că prin *şirul armonic* $(H_n)_n$ întelegem şirul în care termenul general este egal cu suma inverselor primelor n numere naturale, adică,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}. \qquad (1)$$

Termenul H_n mai este numit in [3] , al n–lea *număr armonic* .

Despre $(H_n)_n$ ştim că este un şir divergent, deşi pentru termenul său general avem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot$$

Se cunosc peste 20 de demonstraţii privind divergenţa seriei asociate acestui şir (v.de ex.[4], [2], [5]), începând cu cea a călugărului *Nicholas Oresme*(cel care l-a semnalat pentru prima dată), din anul 1350 .

În cele ce urmează ne va interesa o încadrare a şirului armonic prin alte două şiruri a căror divergenţă să fie evidentă . Pentru aceasta vom prezenta şi demonstra două rezultate preliminare elementare . Primul dintre ele, deşi îndeobşte cunoscut - este prezentat aici pentru independenţa faţă de alte surse bibliografice.

1. *Lemă*

Pentru $x \geq 0$ are loc următoarea dublă inegalitate ,

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x \ . \qquad (2)$$

Demonstraţie

Pentru $x = 0$ are loc relaţia de egalitate. Considerăm funcţia $f : [0, \infty) \to R$, $f(x) = \ln(x+1)$, căreia îi aplicăm teorema creşterilor finite (a lui *Lagrange*) pe intervalul $[0, x] \subset [0, \infty)$. Există deci $c \in (0, x)$ astfel încât ,

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{c+1} \ . \text{ Cum, } \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c+1} < 1 ,$$

rezultă de asemenea şi $\frac{1}{x+1} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$, deci

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x \ .$$

2. *Lemă*

Pentru $k \in N^*$ are loc încadrarea ,

$$\frac{1}{1+k} < ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k} . \qquad (3)$$

Demonstrația rezultă din inegalitatea (2), cu substituția $x = \frac{1}{k}$. Inegalitățile sunt stricte.

Suntem acum în măsură să obținem o încadrare pentru şirul armonic . Rezultatul nu este nou (el are o vechime de peste 150 de ani !.. , v.[7] , citată după [6] , p.187) ; ; nouă este – după cunoştințele noastre - doar metoda de domonstrație .

3. *Propoziție* **(*inegalitatea Schlömilch – Lemonnier*)**

Pentru $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$, avem ,

$$ln\,(n+1) < \mathrm{H}_n < 1 + ln\, n . \qquad (4)$$

Demonstrație

Insumând în (3) după $k = \overline{1, n}$, obținem,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k} < \sum_{k=1}^{n} ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} .$$

Cu notația (1) şi proprietațile logaritmilor , vom avea deci

$\mathrm{H}_{n+1} - 1 < ln \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right) < \mathrm{H}_n$, şi efectuând produsul "telescopic" de sub logaritm , obținem ,

$$\mathrm{H}_{n+1} - 1 < ln(1+n) < \mathrm{H}_n . \qquad (5)$$

De aici se deduce uşor relația (4) din enunț .

4. *Observație* O demonstrație alternativă a inegalitații (4) se găseşte în excelenta monografie [8] .

5. *Aplicație*

O problemă interesantă din *Mathematics Magazine* (v.[1]) – cea care de fapt a ocazionat această notă , are următorul enunț :

- Fiind dat un număr natural n , să se găsească un număr natural m astfel încât

$$\mathrm{H}_m - \mathrm{H}_n > 1 .$$

Soluția dată în aceiaşi revistă (p.85) este eronată ! Inegalitatea stângă din (4) , este obținută prin majorarea unei integrale (- aceasta este de altfel cea mai des întalnită demonstrație utilizată în acest caz - vezi de exemplu şi *demonstrația 9* din [4]) , anume :

$$ln(1+n) = \int_1^{n+1} (1/x)\,dx < \mathrm{H}_n .$$

De aici se deduce (*sic !*) : $\mathrm{H}_m - \mathrm{H}_n > ln\,(m+1) - ln\,(n+1) > ln\frac{m+1}{n+1}$,

iar apoi din $ln\frac{m+1}{n+1} > 1$, rezultă , $\frac{m+1}{n+1} > e$, de unde $m > (n+1)\,e - 1$, etc.

Numai că – avem de fapt , $-\mathrm{H}_n < -ln\,(n+1)$, deci această inegalitate nu poate fi însumată cu

$H_m > \ln(m+1)$ (!..) .

Este clar că trebuie folosită şi a doua inegalitate din încadrarea (4) , sub forma **$-H_n > -1 - \ln n$** , care alături de **$H_m > \ln(m+1)$** conduce la

$H_m - H_n > \ln(m+1) - \ln n - 1 = \ln \frac{m+1}{n} - 1$. Punând condiţia $\ln \frac{m+1}{n} - 1 > 1$, rezultă $\ln \frac{m+1}{n} > 2$, adică $m > n\,e^2 - 1$. Luând m □ $[n\,e^2 - 1] + 1 = [n\,e^2]$, obţinem răspunsul corect la problemă . De exemplu majorând e^2 prin **8** , rezultă că $m = 8n$ constituie o soluţie care satisface enunţul .

6. *Corolar*

Şirul armonic H_n este divergent . In consecinţă şi seria *armonică* asociată

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

este divergentă .

Demonstraţia rezultă fie din inegalitatea (4) , prin trecere la limită - cu lema "cleştelui" - , fie folosind inegalitatea stângă din (4) – cu criteriul majorării - ; din ambele rezultă imediat concluzia ,

$$\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$$

Bibliografie :

[1] **Beidler John , „*Quickie Q 406*”**, « ***The Mathematics Magazine*** » , Vol. **40** , No. **2** , Mar., **1967, p. 110**

[2] **Bonar D.Daniel , Khoury Michael Jr.** , **„*Real Infinite Series*”** , The Mathematical Association of America , **2006** .

[3] **Graham R., Knuth D., Patashnik O., „*Concrete Mathematics*”**, Second Edition , Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1994

[4] **Kifowit J. Stevens , Stamps A. Terra** , **„*The harmonic series diverges again and again*”**, **The AMATYC Review** , 27 (**2006**) , pp. 31–43 .

[5] Mărghidanu Dorin, **„*O demonstraţie integrală pentru divergenţa seriei armonice*”** în revista « ***MINUS*** », pp. 35- 36 , nr. **2 / 2009.**

[6] **Mitrinović D. S.** (in cooperation with **Vasić P. M.**), **„ *Analytic Inequalities* ”** , Band 165 , Springer–Verlag , Berlin , 1970 .

[7] **Schlömilch O., Lemonnier H., „*Problem 455*”**, « **Nouv. Ann.Math.**», pp.18, 68 ,151**, 1859.**

[8] **Vernescu Andrei** , **„ *Numărul e şi matematica exponenţialei* ”** , Editura Universităţii din Bucureşti , Bucureşti , 2004 .

SUPRAFEȚE ȘI CURBE LAMÉ

MANUEL MATEI ,PITEȘTI

Gabriel Lamé (1795-1870) a fost un distins matematician şi inginer din Paris, care s-a născut la Tours şi a profesat la *Sorbona*, la *Şcoala Politehnică* din Paris şi la *Institutul pentru căi de comunicaţie* din Petersburg. A fost membru al Academiei Franceze de Ştiinţe. A elaborat lucrări remarcabile de *teoria elasticităţii*, de *geometrie* şi de *teoria căldurii*. În celebra sa lucrare din 1818 intitulată „*Cercetarea diverselor metode pentru rezolvarea problemelor de geometrie*", Lamé pune bazele metodei *notaţiilor prescurtate*, ale teoriei *fasciculelor de drepte*, a *fasciculelor de conice* si *cuadrice*, a *coordonatelor curbilinii*, etc. Datorită modului riguros, clar şi precis din lucrările sale, acestea au dat un impuls deosebit dezvoltării *geometriei analitice*. În această lucrare, Lamé introduce o clasă specială de suprafeţe şi de curbe plane, care-i vor purta numele său.

În cele ce urmează vom prezenta „câte ceva" din curbele şi suprafeţele Lamé.

Vom considera repere ortonormate în plan şi în spaţiu.

I. Curbe Lamé:

Curbele $(C)=\left\{(x,y)\left|F(x,y)=\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\alpha}-1=0;a,b\in\mathbb{R}-\{0,0\};\alpha\in\mathbb{Q}\right.\right\}$ *se numesc curbe plane Lamé*. $F(x,y)$ este o funcţie continuă şi cu derivatele parţiale de ordinul întâi nenule în acelaşi timp, ceea ce echivalează cu faptul că există o funcţie $y=f(x)$ aşa încât $F(x,f(x))=0$ pentru orice $x\in\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}$. Se observă imediat că dacă $\alpha=2p$, atunci $f(x)=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^{\alpha}-x^{\alpha}}$ iar dacă $\alpha=2p+1$, atunci $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt[\alpha]{a^{\alpha}-x^{\alpha}}$.

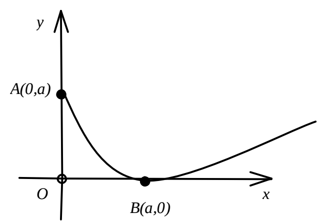
Cazuri particulare:

1) $\alpha=1\Rightarrow(C)=\left\{(x,y)\left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0\right.\right\}$; (*dreapta* prin tăieturi=mulţimea dreptelor ce nu trec prin originea reperului)

2) $\alpha=2\Rightarrow(C)=\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0\right.\right\}$; (*elipsa* cu centrul în originea reperului)

3) $\alpha=\frac{2}{3}$ şi $a=b\Rightarrow(C)=\left\{(x,y)\left|x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=0\right.\right\}$; (*astroida*)

4) $\alpha=\frac{1}{2}$ şi $a=b\Rightarrow(C)=\left\{(x,y)\left|\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{a}=0\right.\right\}$

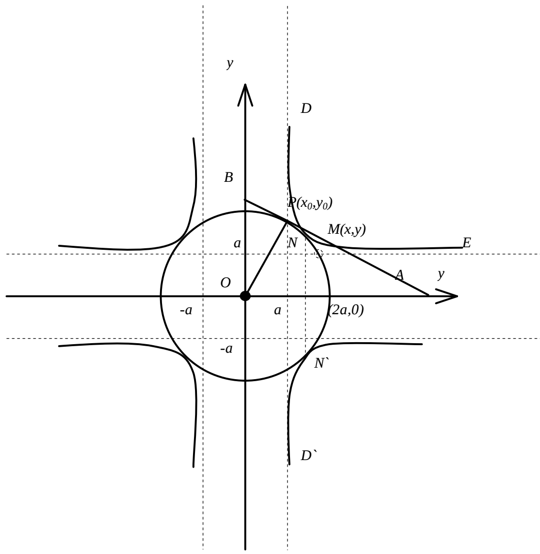


5) $\alpha=-2$ şi $a=b\Rightarrow(C)=\left\{(x,y)\left|\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{a^2}=0\right.\right\}$;

(curba *cruce*, studiată de O. Terquem în 1847).

Curba cruce (ca dealtfel şi celelalte) se defineşte ca loc geometric.

Fie cercul (C) cu raza 2a şi cu centrul în originea sistemului de coordonate aşa cum se vede în figura alăturată.



Tangenta la cerc în punctul variabil $P(x_0, y_0)$, taie axa O_x în A şi pe O_y în B. Se cere locul geometric al punctului M=mijlocul segmentului AB.

Evident că ecuaţia cercului (C) este $x^2 + y^2 - 4a^2 = 0$ şi că $x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} - 4a^2 = 0$. Ecuaţia tangentei la cerc în $P(x_0, y_0)$ este $x_0 x + y_0 y - 4a^2 = 0$ şi deci: $A\left(\frac{4a^2}{x_0}, 0\right); B\left(0, \frac{4a^2}{y_0}\right)$. Rezultă că $M\left(\frac{2a^2}{x_0}, \frac{2a^2}{y_0}\right)$ iar ecuaţia locului geometric se află eliminând parametrii x_0, y_0 din sistemul

$$\begin{cases} x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} - 4a^2 \\ x = \dfrac{2a^2}{x_0} \\ y = \dfrac{2a^2}{y_0} \end{cases} \Rightarrow F(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2} = 0$$

Deci funcţiile $y = f(x) = \pm \dfrac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ care verifică ecuaţia $F(x, f(x)) = 0$, reprezentată grafic după tabelul de variaţie:

x	0		a		$a\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		||||	$-\infty$		$-$	$----$	0
f	0	||||	$+\infty$	$\searrow$	$a\sqrt{2}$	$\searrow$	a
	0	||||	D		N		E

Observaţie: Curba cruce se utilizează în realizarea unor motive ornamentale.

II *Suprafeţe Lamé*

Suprafeţele

$$(S) = \left\{(x, y, z) \middle| F(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\alpha + \left(\frac{z}{c}\right)^\alpha - 1 = 0; a, b, c \in \mathbb{R} - \{0, 0, 0\}; \alpha \in \mathbb{Q}\right\}$$ se *numesc suprafeţe Lamé.*

$F(x,y,z)$ este o funcție continuă și cu derivatele parțiale de ordinul întâi continue și nenule simultan.

Cazuri particulare:

1) $\alpha=1 \Rightarrow (S)=\left\{(x,y,z)\left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0\right.\right\}$ (*ecuația planului* prin tăieturi)

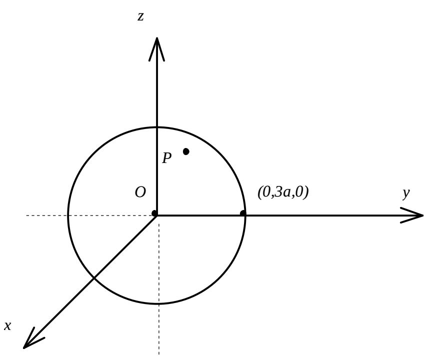
2) $\alpha=2 \Rightarrow (S)=\left\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\right.\right\}$ (*elipsoidul* cu centrul în O)

3) $\alpha=\frac{2}{3}$ și $a=b=c \Rightarrow (S)=\left\{(x,y,z)\left|x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=0\right.\right\}$ (*astroidul*)

4) $\alpha=\frac{1}{2}$ și $a=b=c \Rightarrow (S)=\left\{(x,y,z)\left|\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}=0\right.\right\}$

5) $\alpha=2$ și $a=b=c \Rightarrow (S)=\left\{(x,y,z)\left|\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{a^2}=0\right.\right\}$ (suprafața *cruce*)

În continuare vom defini (și determina ecuația) ca loc geometric, *suprafața cruce*.



Fie sfera cu centrul în O și cu raza de $3a\ (a>0)$ care are ecuația $x^2+y^2+z^2-9a^2=0$ (figura alăturată).

Considerăm un punct $P(x_0,y_0,z_0)$ pe sferă; deci $x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2-9a^2=0$

Planul tangent la sferă în P, are ecuația $x_0x+y_0y+z_0z-9a^2=0$ și taie axele în punctele:

$A\left(\frac{9a^2}{x_0},0,0\right); B\left(0,\frac{9a^2}{y_0},0\right); C\left(0,0,\frac{9a^2}{z_0}\right)$.

Locul geometric al baricentrului triunghiului ABC se obține prin eliminarea parametrilor x_0,y_0,z_0 din sistemul:

$$\begin{cases} x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2-9a^2=0 \\ x_0=\frac{3a^2}{x} \\ y_0=\frac{3a^2}{y} \\ z_0=\frac{3a^2}{z} \end{cases}$$

Se obține ecuația $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{a^2}=0$, care reprezintă o suprafață cruce.

Bibliografie:

[1] C. Mihu și I. Iambor: „*Curbe plane*”, Ed. Tehnică, 1989, București

[2] G. Fihtenholț: „*Curs de calcul diferențial și integral*”. Ed. Tehnică, 1963

O VARIAȚIE DE AFINITATE PYTHAGORICIANĂ

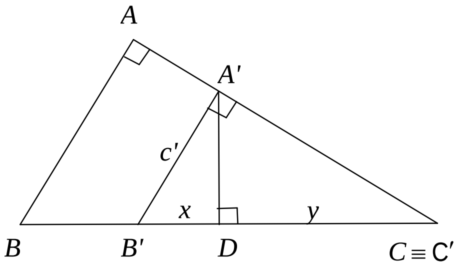
GRAȚIELA CALCAN, BUCOV

Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri dreptunghice $\left(m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle A') = 90^0\right)$ asemenea, cu lungimile laturilor după notațiile obișnuite a, b, c respectiv a', b', c'.

Deci există șirul de rapoarte egale: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \ (*)$.

Din $(*)$ obținem: $\frac{aa'}{a'^2} = \frac{bb'}{b'^2} = \frac{cc'}{c'^2} \Leftrightarrow \frac{aa'}{a'^2} = \frac{bb'+cc'}{b'^2+c'^2}$ și cum $b'^2 + c'^2 = a'^2$, rezultă că $aa' = bb' + cc'$ care reprezintă o relație de afinitate între cele două triunghiuri dreptunghice.

Aceiași relație o putem obține și independent de teorema lui Pythagora, pe cale pur geometrică astfel: așezăm triunghiul dreptunghic mai mic (considerăm că acesta este $A'B'C'$) peste cel mare ($A'B'C'$), astfel ca $C \equiv C'$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$, și apoi din A' coborâm perpendiculara $A'D$ pe $B'C$, unde $D \in B'C$ (ca în figura alăturată).



Dacă: $|B'D| = x$ și $|DC| = y$, atunci $a' = x + y$ și deci: $aa' = ax + ay, \quad (**)$.

Din figură rezultă: $\Delta DA'B' \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{x}{c} = \frac{c'}{a} \Leftrightarrow ax = cc' \ (1)$

$$\Delta DA'C' \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{b'}{a} \Leftrightarrow ay = bb' \ (2)$$

Ținând seamă de (1) și (2), relația $(**)$, devine: $aa' = bb' + cc'$.

DE CE ESTE INTERESANT NUMĂRUL 163?

IOAN DĂNCILĂ, BUCUREȘTI

Vom debuta cu o istorioară a unui dialog purtat între doi mari matematicieni ai secolului trecut, indianul S. Ramanujan: și G. H. Hardy.

Ramanujan: Ai reținut care a fost numărul anului care te-a adus?

Hardy: Avea numărul 1729, un număr care mie nu-mi spune nimic:

Ramanujan: Dar, totuși dacă te gândești un pic, este un număr foarte interesant! Este cel mai mic număr care poate fi exprimat în două moduri diferite ca sumă a două cuburi perfecte:

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3.$$

În fermecătoarea sa carte „Amuzamente matematice” Martin Gardner face o demonstrație interesantă pentru a ajunge la concluzia: De fapt toate numerele (naturale) sunt interesante.

„Se pune întrebarea: există oare numere neinteresante? Putem demonstra că nu, prin următoarele etape simple. Dacă există numere neinteresante, putem împărţi numerele în două mulţimi, cea cu numere interesante şi cea cu numere neinteresante. În mulţimea numerelor neinteresante există un singur număr, care este cel mai mic. Deoarece el este cel mai mic număr neinteresant, el devine de fapt un număr interesant, de aceea trebuie să-l scoatem din mulţimea numerelor neinteresante şi să-l transferăm în cealaltă mulţime. Acum vom obţine un alt număr neinteresant cle mai mic. Repetând procedeul, toate numerele neinteresante vor deveni interesante."

Nu se ştie cum a descoperit L. Euler că formula: $f'(n) = n^2 + n + 41$

are o proprietate remarcabilă: pentru orice n număr natural de la 0 la 39, f(n) este număr prim.

Matematica nu a descoperit nici o altă formulă de gradul al II-lea care să producă atât de multe numere prime. Pentru n mai mic de 10 milioane, aproximativ o treime dintre numerele de forma $n^2 + n + 41$ sunt numere prime.

Iar ecuaţia $x^2 + x + 41 = 0$ are discriminantul $\triangle = 1 - 164 = -163$.

Şi o mare surpriză, numărul 163 este înrudit cu unele constante fundamentale ale matematicii:

$e^{\pi\sqrt{163}} \approx 262537412640768744$, un număr aproape întreg, sau cu 15 zecimale exacte …,999 999 999 999 250.

Dar surprizele legate de numărul 163 nu se opresc aici. Cea mai mare valoare a lui d pentru care sistemul de numere $a + b\sqrt{-d}$ verifică teorema factorizării unice a lui Gauss este … 163. Şi aşa cum v-am obişnuit vă propun două mici provocări:

1. Numărul 163 este al 38-lea număr prim. Gasiţi şi alte motive pentru care numărul 38 este un număr i nteresant.

2. Numărul 365 este numărul zilelor dintr-un an. Din punct de vedere matematic , de ce ar fi interesant numărul 365?

Bibliografie:

Keith Devlin: Vârsta de aur a matematicii, Editura Theta, 2000.

Ioan Dăncilă: Matematica gimnaziului între profesor şi elev, Editura Aramis 2001.

M. Gardner: Amuzamente matematice, Editura d. Ştiinţifică, 1968.

Ioan Dăncilă: Matematică distractivă, clasele 5-6, Editura Sigma 2003.

ASUPRA UNEI INEGALITĂŢI CONDIŢIONATE

IOANA CRĂCIUN şi GHEORGHE CRĂCIUN, PLOIEŞTI

În această nota matematică vom da mai multe rezolvări ale inegalităţii:

Dacă $a, b, c \geq 0, a + b + c = 1$ **atunci** $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

Soluţia 1.

Se ştie că media pătratică este mai mare sau egală cu media aritmetică adică

$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3}$. Deorece a+b+c=1 obţinem $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{1}{3}$.

Ridicând la pătrat se obţine $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

Soluția 2.
Folosim inegalitatea Cauchy -Schwarz adică

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq\left(a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z\right)^2.$$

Luăm x=y=z=1 şi obținem $\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot\left(1^2+1^2+1^2\right)\geq\left(a\cdot1+b\cdot1+c\cdot1\right)^2$ adică

$(a^2+b^2+c^2)\cdot3\geq(a+b+c)^2$. Deorece a+b+c=1 obținem $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$.

Soluția 3.
Considerăm funcția $f(x)=x^2$. Funcția fiind convexă obținem folosind o proprietate a funcțiilor convexe că $f(\frac{a+b+c}{3})\leq\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}$. Deorece a+b+c=1 obținem

$$f(\frac{1}{3})\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\Rightarrow\frac{1}{9}\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}.$$

Soluția 4.
Notăm $a=x+\frac{1}{3};b=y+\frac{1}{3};c=z+\frac{1}{3}$. Deorece a+b+c=1 obținem $x+y+z=0$.
Avem

$$a^2+b^2+c^2=(\frac{1}{3}+x)^2+(\frac{1}{3}+y)^2+(\frac{1}{3}+z)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}(x+y+z)+x^2+y^2+z^2.$$

Doarece $x+y+z=0$ obținem $a^2+b^2+c^2=\frac{3}{9}+x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}$.

Soluția 5.
Folosim inegalitatea lui Cebâşev. Dacă

$$a\geq b\geq c;\ x\geq y\geq z\Rightarrow(a+b+c)\cdot(x+y+z)\leq3\cdot(a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z).$$

Luăm în această inegalitate $x=a;y=b;z=c$ şi obținem

$\left(a+b+c\right)^2\leq3(a^2+b^2+c^2)$. Deorece a+b+c=1 obținem $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$.

Soluția 6.
Întrun sistem de axe ortogonale *Oxyz* se consideră planul determinat de punctele A(0,0,1);B(1,00); C(0;1;0). Dacă P(*a,b,c*) este un punct din acest plan atunci

OP= $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Se arată că distanța de la originea O la acest plan este OM= $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Scriind că OP $\geq$ OM obținem $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$. Pentru detalierea acstei soluții propunem cititorului să consulte [1].
Folosind una dintre aceste rezolvări obținem următorea generalizare :

Dacă $x_1;x_2;...x_n\geq0$ **şi** $x_1+x_2+...x_n=1$ **atunci** $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\geq\frac{1}{n}$.

BIBLIOGRAFIE:
[1] Mircea Becheanu, Bogdan Enescu ,,Inegalități elementare... şi mai puțin elementare'', Ed.GIL