La iniţiativa preşedintelui Filialei Vălenii de Munte a Societăţii de Ştiinte Matematice, profesor Anghel Dafina, s-a desfăşurat sâmbătă, 19 noiembrie 2011, în amfiteatrul Grupului Şcolar „Romeo Constantinescu" din Vălenii de Munte o sesiune de comunicari metodico – ştiintifice dedicată genialului Evariste Galois - 200 de ani de la naşterea sa.

Ideile lui Galois şi implicaţiile lor în dezvoltarea matematicii, teoria Galois şi teoria Cogalois, au fost prezentate în mod magistral de profesorul universitar dr. Toma Albu, iar conferenţiar dr. Daniel Bulacu şi profesor dr. Marcel Ţena au reamintit principalele idei utilizate în rezolvarea ecuaţiilor algebrice de grad cel mult 4 şi biografia lui Evariste Galois.

Spre deosebire de majoritatea celorlalte ştiinţe, în matematică, ideile au o valoare durabilă, valoare nediminuată de trecerea anilor.

Lucrările prezentate în partea a doua a întâlnirii s-au constituit în bune ocazii pentru a discuta despre programa actuală, despre rolul matematicii în şcoala contemporană, despre contribuţiile matematicienilor români la dezvoltarea acesteia.

Profesorii de matematică participanţi au avut prilejul să se întalneasca cu profesori universitari din Bucureşti şi Ploieşti şi cu inspectorii şcolari de specialitate.

Felicitări celor care au făcut posibilă această întâlnire de o înaltă ţinută ştiinţifică.

Prof. Nicolae Angelescu

BICENTENARUL NAŞTERII LUI GALOIS

Prof. univ. dr. *TOMA ALBU,* Institutul de Matematică „Simion Stoilow"al Academiei Române
Prof. dr. *MARCEL ŢENA,* Colegiul Naţional „Sfântul Sava", Redactor-şef Gazeta Matematică

S-au împlinit anul acesta 200 de ani de la naşterea lui *Évariste Galois* (1811-1832), unul dintre marile genii ale matematicii. S-a născut la 25/26 octombrie 1811 în orăşelul Bourg-la-Reine de lângă Paris. La 12 ani, în 1823, intră la Colegiul Louis-le-Grand, unde are prilejul să citească lucrările lui Lagrange, Euler, Gauss, Jacobi. În 1828, elev fiind, publică în Analele lui Gergonne primul său articol [4]. Tot în 1828 este respins la examenul de admitere la École Polytechnique, dar prezintă Academiei de Ştiinţe primul său memoriu referitor la rezolvarea ecuaţiilor algebrice, pe care însă Cauchy îl pierde. În 1829 este respins a doua oară la École Polytechnique şi se înscrie la École Normale. În urma unui articol pe care îl scrie în Gazeta Şcolii împotriva directorului, Galois este eliminat la 3 ianuarie 1831. La 9 mai 1831, în urma unui discurs antiregalist ţinut cu ocazia unui banchet este arestat, dar este repus în libertate la 15 iunie în acelaşi an.

Participă apoi la revoluţia din 14 iulie 1831, în urma căreia este întemniţat şi eliberat abia la 16 martie 1832. Între timp, Poisson respinge memoriul în care Galois scrisese principalele rezultate ale cercetărilor sale privind ecuaţiile algebrice. Eliberat din închisoare, în urma unei încurcături amoroase, acceptă duelul cu unul din foştii săi prieteni şi camarazi de suferinţă, Ernest Duchatelet. Piere în urma duelului din 30 mai 1832.

Opera scrisă a lui Galois (care s-a păstrat), însumând circa 60 de pagini, constituită din cinci lucrări publicate în timpul vieţii şi trei lucrări postume, a produs o adevarată revoluţie în algebră. Primul care a citit si a recunoscut importanţa lucrărilor nepublicate ale lui Galois a fost Joseph Liouville, fondatorul celebrei reviste „Journal de Mathématiques Pures et Appliquées", unde a publicat laolaltă în anul 1846 toate lucrarile sale [5]. Unul din biografii lui Galois, André Dalmas, scria în [3]: „Niciodată un număr de pagini atât de redus nu a asigurat autorului lor un renume atât de mare". Matematicianul francez Émile Picard scria în 1897: „Galois are fără îndoială egali printre marii matematicieni ai acestui secol; niciunul nu-l întrece însă în originalitatea şi profunzimea concepţiilor" [7].

Matematicianul român Dan Barbilian scrie în lecţia introductivă la cursul său de Teoria lui Galois a ecuaţiilor algebrice [2]: „Ce revine, la propriu, lui Galois în constituirea teoriei care îi poartă numele? În primul rând introducerea de idei formale într-o problemă cantitativă (rezolvarea ecuaţiilor), fapt de o însemnatate hotărâtoare, ce avea să schimbe faţa algebrei. În al doilea rând: paternitatea noţiunii de divizor normal, revine fără nicio îndoială lui Galois. Dar adevăratul titlu de glorie al lui Galois îl consituie caracterizarea ecuaţiilor rezolubile prin radicali, cu ajutorul grupului corespunzător."

În scrisoarea-testament [6] către prietenul său, Auguste Chevalier, scrisă în noaptea dinaintea duelului, Galois se adresează acestuia: „Să arăţi teoremele mele lui Gauss şi Jacobi şi să-i rogi să se pronunţe public nu asupra adevărului, ci asupra importanţei acestora."

Teoria lui Galois pentru corpuri comutative arbitrare a fost construită în anul 1910 de către E. Steinitz pentru extinderile finite de corpuri [9] şi completată în anul 1928 de către W. Krull pentru extinderile algebrice infinite de corpuri [10]. În anul 1986 C. Greither şi D.K. Harrison [8] au pus bazele unei teorii duale, aşa-numita Teorie Cogalois, unul din protagoniştii acestei teorii fiind primul dintre autorii acestor rânduri [1].

Bibliografie
[1] T. Albu: „*Cogalois Theory*”, A Series of Monographs and Textbooks, Vol. 252, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 2003, 368 pages.
[2] D. Barbilian: *Évariste Galois și ideea de grup*, în cartea „*Algebră axiomatică*”, volumul II, Ed. Didactică, București, 1988.
[3] A. Dalmas: „*Évariste Galois*”, Ed. Stiinţifică, Bucureşti, 1962.
[4] É. Galois: *Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques*, Annales de Mathématiques Pures et Appliquées **XIX**: 294-301.
[5] É. Galois: *OEuvres mathématiques d'Évariste Galois*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **XI** (1846), 381–444.
[6] É. Galois: *Lettre d'Évariste Galois à Auguste Chevalier*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **XI** (1846), 408–415.
[7] É. Galois: *Oeuvres mathématiques avec un introduction par É.Picard*, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1897.
[8] C. Greither and D.K. Harrison: *A Galois correspondence for radical extensions of fields*, Journal of Pure and Applied Algebra **43** (1986), 257-270.
[9] E. Steinitz : *Algebraische Theorie der Körper*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **137** (1910), 167-309.
[10] W. Krull : *Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen*, Mathematische Annalen **100** (1928), 687-698.
[11] www.wikipedia.org

NUMĂRUL DE AUR ÎN POLIEDRE PLATONICE

MIRON OPREA

„*Secţiunea de aur* s-a dovedit a fi, pe de o parte, cea mai simplă dintre fracţiile continue (dar şi „cel mai iraţional dintre numerele iraţionale”), iar pe de altă parte , sâmburele unui număr infinit de fenomene naturale ”
(Mario Livio : *Secţiunea de aur*)

Numărul de aur $(\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2})$ sau *secţiunea de aur* a apărut pentru prima dată în *Elementele* lui Euclid sub forma problemei „*împărţirii unui segment de dreaptă în medie şi extremă raţie*” aşa cum se arată în [5] şi a căpătat de-a lungul veacurilor o atenţie deosebită din partea pictorilor, arhitecţilor, muzicienilor, biologilor şi, mai ales, a matematicienilor, datorită proprietăţilor sale şi a vocaţiei de a putea construi o măsură a „*frumosului*” (în acest sens, a se vedea [1], [2], [3]).
În [5] noi am prezentat câteva tipuri de extensii ale „secţiunii de aur”, printre care un loc deosebit l-au ocupat secţiunile în $\mathbb{R}$ (segmentul de dreaptă), în $\mathbb{R}^2$ (dreptunghiul), în $\mathbb{R}^3$ (paralelipipedul), ... şi în $\mathbb{R}^n$ (*paralelipipedul n-dimensional*) ce au condus la mai multe *numere de aur* (numere reale situate în intervalul $\left(\frac{3}{2},2\right)$ şi care care şi-au găsit aplicaţii şi în lumea „artelor abstracte” mai ales în prima jumătate a sec. XX. [3],[4]

În cele ce urmează vom arăta cum şi în ce mod numărul φ apare în *poliedrele platonice* (numite şi „*corpuri cosmice*"): tetraedrul regulat, cubul, (hexaedrul regulat), octaedrul, dodecaedrul şi icosaedrul reprezentate în Fig. 1:

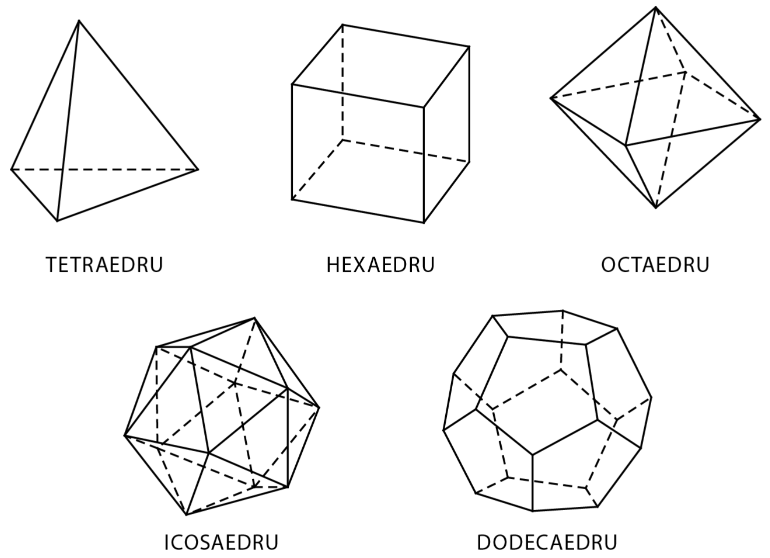

Fig. 1

Dar, pentru început, vom prezenta cititorului

I. ***Câteva generalităţi din lumea poliedrelor***

Se numeşte *poliedru*, orice corp limitat de plane; porţiunile din aceste plane limitate de celelalte plane formează *feţele* poliedrului şi au formă de poligoane. Laturile fiecărui asemenea poligon sunt comune la câte două feţe şi se numesc *muchiile* poliedrului. Vârfurile poligoanelor feţelor sunt comune la cel puţin 3 feţe şi se numesc *vârfurile* poliedrului. Vom nota:

V=numărul vârfurilor; F= numărul feţelor şi M=numărul muchiilor unui poliedru oarecare. Mai distingem la un poliedru *unghiurile diedre* (câte unul la fiecare muchie) şi *unghiuri poliedre* (câte unul la fiecare vârf al poliedrului). Zicem că un *poliedru este convex* dacă este situat în întregime de o singură parte a planului oricăreia din feţele sale.

În studiul poliedrelor, deosebim două tipuri de proprietăţi geometrice:

1. *Proprietăţi metrice*: sunt cele legate de lungimile muchiilor, de mărimea unghiurilor plane, diedre şi poliedre, de ariile feţelor, de volum etc.

2. *Proprietăţi topologice*: sunt cele care rămân invariante prin aşa zisele trasformări topologice (două poliedre egale, două poliedre asemenea, toate tetraedrele etc.) Transformările topologice ale poliedrelor reprezintă acele transformări care duc poliedrul într-unul *izomorf* cu el. este util să definim ce se înţelege prin *poliedre izomorfe*:

Definiţie: *Două poliedre se zic izomorfe dacă între feţele, muchiile şi vârfurile lor se poate stabili o corespondenţă biunivocă astfel încât:*

a) feţele corespunzătoare au acelaşi număr de vârfuri;

b) la două feţe care au o muchie comună, corespund feţe care au de asemenea o muchie comună;

c) la două muchii care au un vârf comun, corespund muchii care au la fel un vârf comun.

Una din proprietățile topologice esențiale (care, de fapt, este şi clasificatoare în lumea poliedrelor) este *genul*. Un poliedru e de *gen zero*, dacă orice linie frântă închisă desenată pe suprafața sa îl împarte în două suprafețe separate (ca exemplu avem toate poliedrele convexe). Un poliedru este de *gen n*, dacă *n* este numărul maxim de linii frânte închise care nu se intersectează între ele şi care se pot desena pe suprafața poliedrului fără a o împărți în suprafețe separate (ex. poliedrele stelate).

Definiție: Se numeşte *caracteristică euleriană** a unui poliedru P, expresia: $c(P)=V-M+F$. Există următoarea teoremă (Euler): *Pentru orice poliedru de gen zero, avem* $c(P)=2$. Demonstrația se găseşte în manualele şcolare de geometrie în spațiu. De asemenea, în cărțile de geometrie în spațiu se găseşte enunțată şi demonstrată următoarea teoremă:

Există numai 5 poliedre regulate convexe neizomorfe între ele. Iată tabelul acestor 5 poliedre regulate:

Denumirea (*P*)	***V***	***M***	***F***	***c(P)***
Tetraedrul	4	6	4	2
Cubul	8	12	6	2
Octaedrul	6	12	8	2
Dodecaedrul	20	30	12	2
Icosaedrul	12	30	20	2

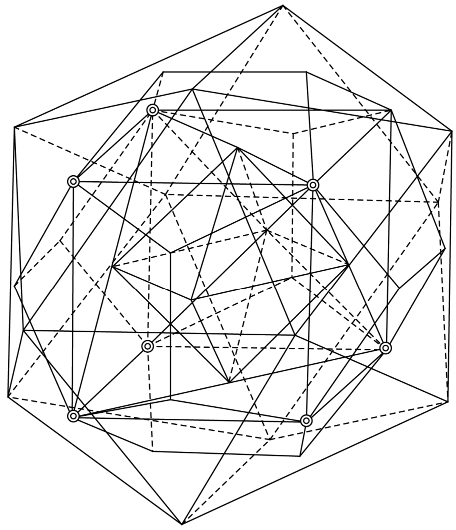

Fig. 2

Din acest tabel și pe baza simetriei acestor poliedre observăm:

1) *cubul* și *octaedrul* au acelaşi *M*, dar numărul de fețe şi vârfuri sunt inversate între ele. Acelaşi lucru şi pentru dodecaedru şi icosaedru. De aici rezultă: dacă unim centrele fețelor unui cub obținem un octaedru şi la fel, dacă unim centrele fețelor unui octaedru obținem un cub. Aceasta înseamnă că cele două poliedre se pot înscrie unul în altul (aceste două poliedre se zic *duale*).

2) analog *icosaedrul* si *dodecaedrul* sunt *duale*.

3) *tetraedrul este autodual*

Iată în Fig. 2 cele 5 poliedre platonice înscrise unul în altul. Invităm cititorul să identifice cele 5 poliedre platonice din Fig. 2. (Un exercițiu foarte important în dezvoltarea intuiției spațiale)

Analog, putem considera mijloacele muchiilor unui cub vârfurile unui icosaedru înscris în cub. Diagonalele fețelor unui cub formează tetraedrul regulat înscris în cub, iar mijloacele muchiilor tetraedrului regulat constitue vârfurile octaedrului regulat înscris în tetraedrul regulat. Centrele de greutate ale celor 20 de fețe ale icosaedrului regulat reprezintă vârfurile dodecaedrului regulat înscris în icosaedrul regulat.

Invităm cititorul să analizeze (demonstreze) şi să reprezinte în desen situațiile de mai sus de înscriere unul în altul a acestor poliedre platonice. Este un exercițiu extrem de util şi interesant care ilustrează

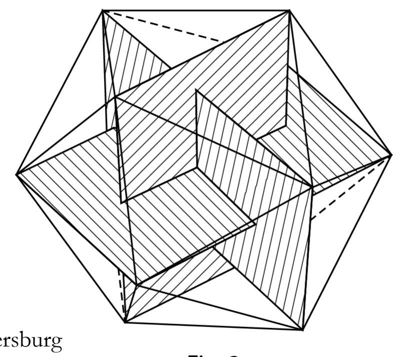

Fig. 3

* Publicată de L. Euler în 1758 în Memoriile Academiei din Petersburg

preocupările matematicienilor (şi nu numai) pentru aceste poliedre de-a lungul veacurilor (Luca Pacioli, J. Kepler, L. Euler etc.)

II. *Numărul de aur în poliedrele platonice*

Din cele 5 poliedre platonice numai 3 au legătură directă cu numărul de aur: *octaedrul*, *dodecaedrul* si *icosaedrul*. Dintre aceste trei poliedre, *icosaedrul* și *dodecaedrul* sunt intim legate de numărul de aur, chiar în mai multe moduri. Astfel cele 12 vârfuri ale unui icosaedru pot fi împărțite în 3 grupuri de câte patru, cu vârfurile fiecărui grup situate în vârfurile unui *dreptunghi de aur* (vezi [5]). Cele 3 dreptunghiuri de aur sunt perpendiculare unul pe altul, iar punctul lor comun este centrul icosaedrului (Fig. 3)

În mod analog, cele 12 fețe pentagonale ale dodecaedrului pot fi împărțite în 3 grupuri de câte 4, iar fiecare din aceste grupuri formează şi el un *dreptunghi de aur* (Fig. 4).

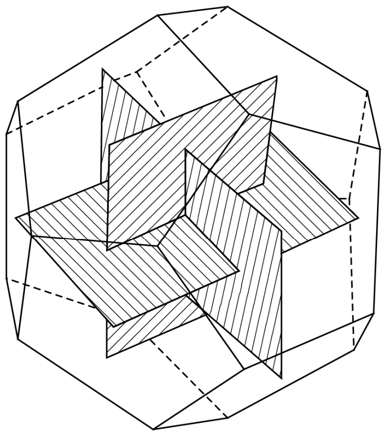

Fig. 4

Icosaedrul regulat se poate înscrie în octaedrul regulat.

Pe fiecare din cele 12 muchii ale octaedrului regulat aşezăm câte un vârf din cele 12 ale icosaedrului regulat (aşa cum se arată în Fig. 5) şi fiecare muchie a octaedrului este împarţită în *raportul de aur*.

Se observă că din cele 20 de feţe ale icosaedrului, 8 dintre ele sunt triunghiuri echilaterale înscrise în cele 8 feţe ale octaedrului care sunt tot triunghiuri echilaterale, iar celelalte 12 feţe ale icosaedrului sunt în interiorul octaedrului $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Considerăm două feţe consecutive ale icosaedrului: faţa $\Delta I_1I_2I_3$ înscrisă în faţa $A_1A_2A_3$ a octaedrului şi faţa $\Delta I_1I_2I_4$ în interiorul octaedrului $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Fie $A_1\ A_1A_2 = A_1A_3 = ... = A_1A_2 = A_1A_3 = ... = A_5A_6 = a$ şi $AI_1 = x$

$I_1I_3^2 = (a-x)^2 + x^2 - 2x(a-x)\cos 60^0 = (a-x)^2 + x^2 - x(a-x) = 3x^2 - 3ax + a^2$ (căci $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$).

În $\Delta A_2I_2I_4 \in$ pătratului $A_2A_3A_4A_5$, avem:

$I_2I_4^2 = [\sqrt{2}(a-x)]^2 = 2a^2 - 4ax + 2x^2$.

Deci:

$$3x^2 - 3ax + a^2 = 2a^2 - 4ax + 2x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - ax - x^2 = 0 \Leftrightarrow (\frac{a}{x})^2 - \frac{a}{x} - 1 = 0$$

(deoarece $0 \prec x$). Şi deci $\frac{a}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

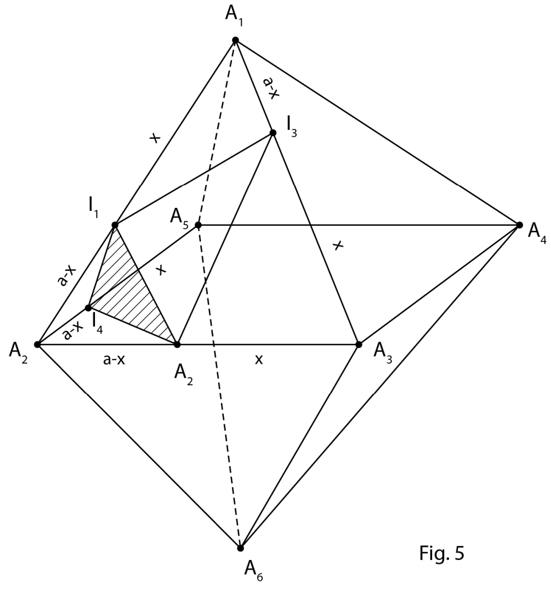

Fig. 5

ceea ce înseamnă că fiecare vârf al icosaedrului împarte muchia octaedrului pe care e aşezat în raportul φ.

Bibliografie:
[1] Ioan Ciofu: Numărul de aur. Matrice a evoluţiei ? (Ed. Coresi, Bucureşti, 1994)
[2] Matila Ghyka: Estetică şi teoria artei (Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981)
[3] Mario Livio: Secţiunea de aur (Ed. Humanitas, bucureşti, 2005)
[4] Marius Cleyet-Michaud: Le nombre d'or (Presses Universitaires de France, Paris, 1982)
[5] Miorn Oprea: Extensii ale secţiunii de aur (Axioma, nr. 15/2005, Ploieşti)
[6] H. R. Radian: Cartea proporţiilor (Ed. Meridiane, Bucureşti, 1981)
[7] Tiberiu Roman: Poliedre regulate şi semiregulate (în volum "Probleme actuale de matematică", 1965)
[8] Martin Gardner: Amuzamente matematice (Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1968)

CHIAR L-A UIMIT THALES PE REGELE EGIPTULUI ?

IOAN DĂNCILĂ, Bucureşti

Inainte de a ne întreba încotro mergem,
n-ar trebui să fim siguri de unde venim ?

„*Eu cred* – scria profesorul N. Mihăileanu – *că civilizația antică veche a cunoscut o înaltă perioadă culturală și științifică acum șase mii de ani. Piramidele egiptene și ziguratele babiloniene, volumul trunchiului de piramidă, valoarea cu multe zecimale exacte a unor numere iraționale, metoda rezolvării ecuației de gradul al doilea, frumoasa operă Ghilgameș ... acestea nu puteau să fie rezultatul unor oameni care dibuie*".

Și apar din ce în ce mai multe motive să-l credem pe profesor. De ce înainte de a deveni celebri Thales şi Pithagora au, călătorit în Egipt? Așa s-a născut îndoiala şi firesc, întrebarea din titlu.

Pliniu cel Batrân ne povesteşte cum în timpul călătoriei în Egipt, Thales a măsurat nemăsurabilul, inaccesibila înălţime a Marii Piramide, uimindu-l pe însuşi regele Egiptului de atunci. Ajuns la baza Marii Piramide, ridicată de faraonul Keops cu scopul de a-i obliga pe oameni să-şi dea seama cât sunt de mici şi neputincioşi, Thales ar fi avut un moment de graţie: „*dacă mâna mea nu poate face măsurătoarea înălțimii piramidei, o voi face cu mintea !*"

Şi şi-a găsit un aliat în darul lui Ra, umbra, a capului său şi a piramidei.

Procedeul pe care l-ar fi folosit era fără îndoială ingenios, implica un caz particular al teoremei cunoscute astăzi în orice colţ al lumii sub numele de *teorema lui Thales*. El se bazează pe observaţia: *dacă pentru un băț (vertical) umbra lui este egală cu lungimea sa, aceeași relație are loc pentru orice obiect, deci și pentru piramidă.*

Numit, în general, „calculul umbrei"., procedeul era cunoscut în

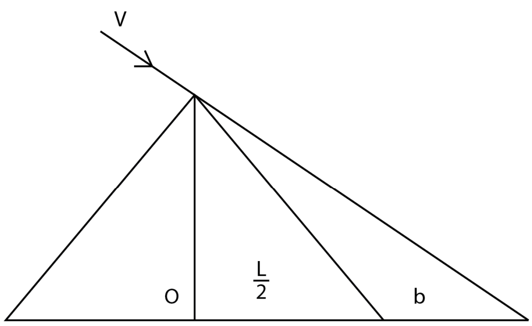

Figura 1

antichitate, mărturie fiind o placuţă de lut pe care babilonienii au descris cum l-au folosit la determinarea înalţimii unui arbore.

Thales ar fi format pe nisip un arc de cerc cu raza cât înălţimea sa, s-a situat în centrul cercului şi a aşteptat până când vârful umbrei sale a atins circumferinţa, deci umbra sa era egală cu înălţimea sa. Atunci a înfipt un ţăruş chiar în vârful umbrei piramidei şi cu ajutorul unei sfori întinse a măsurat distanţa dintre ţăruş şi baza piramidei.

O superbă istorioară care povestită şi repovestită a făcut să strălucească de uimire şi încântare ochii a mii de generaţii de elevi.

Oare chiar aşa s-a întâmplat?

Cum a determinat (calculat) Thales distanţa dintre centrul bazei piramidei (punct inaccesibil) la ţăruşul înfipt chiar în vârful umbrei? Este doar o întrebare.

Un răspuns pripit ar fi: cum genialii arhitecţi ai piramidei au realizat laturile bazei piramidei cu o neegalată exactitate spre cele patru puncte cardinale, iar, în momentul măsurătorii, lungimea umbrei piramidei (orientată spre nord) se compunea din înălţimea triunghiului umbrei lăsate pe nisip şi jumătate din lungimea laturii bazei lungimii facil de măsurat (vezi fig. 1), masurătoarea pare evidentă.

Dar dacă stăm şi medităm, în majoritatea timpului, umbra pe nisip a piramidei, atunci când ea există, este un triunghi neisoscel ADE (vezi fig. 2) cu baza chiar latura de nord a piramidei.

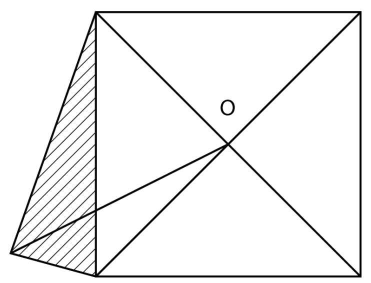

Figura 2

Ca să poată măsura lungimea umbrei piramidei (segmentul EO), unde O este centrul bazei piramidei (punctul în care se proiectează vârful V al piramidei regulate ABCD), Thales va trebui să folosească o altă măsurătoare indirectă.

Pentru aceasta era necesar ca lungimea umbrei piramidei să poată fi descompusă în segmente posibil de măsurat, condiţie ce se realizează <u>numai</u> când segmentul OE este perpendicular pe latura AD, îndeplinind condiţiile uneia dintre reciprocele teoremei celor trei perpendiculare. Atunci triunghiul EAD este isoscel (vezi fig. 3)

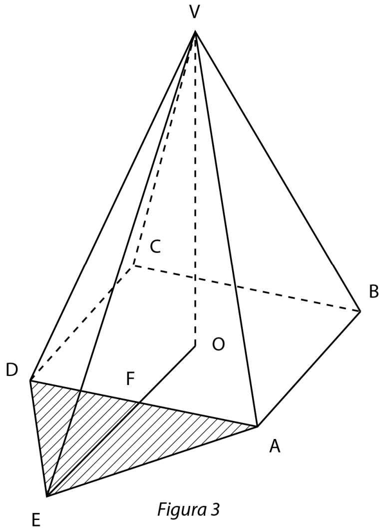

Figura 3

$$VO \perp (ABCD), VE \perp AD \Rightarrow EO \perp AD$$ În aceste condiţii se poate măsura:

$$OE = \frac{1}{2}AB + EF$$

(AB – latura piramidei; EF – mediana triunghiului isoscel EDA (ED=EA) „desenat” de umbra piramidei).

În concluzie, pentru a putea măsura lungimea umbrei, atunci când ea este egală cu înălţimea piramidei, pentru paralela de 30^0 acolo unde este situată Marea Piramidă, trebuie îndeplinite, deodată, două condiţii severe:

- razele soarelui să facă un unghi de 45^0 cu solul şi
- razele soarelui „să cadă” perpendicular pe latura nordică a piramidei.

Să nu uităm că Thales a fost un astronom recunoscut la vremea sa şi, de accea, să apelăm la astronomii zilelor

noastre. Aceste condiţii sunt îndeplinite simultan, spun astronomii, <u>numai</u> în două zile ale fiecărui an: 20 ianuarie şi 20 noiembrie.
Să fi ştiut aceasta Thales şi să fi ajuns la piramide într-una din aceste? este o altă întrebare. Mai spun unii istorici că această demonstarţie l-ar fi impresionat profund pe regele egiptenilor care asistase uimit la această dovadă de virtuozitate.

Dar, oare, cele remarcate nu ne îndreptăţesc să ne alăturăm celor spuse de prof. N. Mihaileanu, să bănum că, mai degrabă, egiptenii i-au arătat lui Thales cum se poate măsura o înălţime inaccesibilă folosind prilejul vizitei la Marea Piramidă? Şi apoi, alături de alte cunoştinţe şi învăţăminte dobândite în Egipt, Thales să le fi transmis contemporanilor săi?

Continuă profesorul Mihăileanu:

„*Așa le cunoaște istoria noastră și se miră de existența lor. [...] Către secolele V-IV î.Hr., vechile cunoștințe încep să fie redescoperite. Asta explică ceea ce numim miracol(ul grecesc)*"

Și, oare, nu tot un înțelept al antichității, Platon, filozofa: „*Orice descoperire este o aducere aminte*" ?

Bibliografie:

[1] A. C. Albu: O istorie a matematicii, Antichitatea, Editura Nomina, 2009
[2] E. Dăncilă, I. Dăncilă: Învață geometrie cu … mâinile tale!, Editura Erc Press, 2010
[3] E. Dăncilă, I. Dăncilă: Matematica serveşte!, Editura Erc Press, 2008
[4] E. Dăncilă, I. Dăncilă: Învață din greşelile altora, în curs de apariţie
[5] D. Guedy: Le theoréme du perroquet, Edition du Seuil, 1998

ASUPRA UNEI PROBLEME DE LA CONCURSUL ANUAL W. L. PUTNAM AL UNIVERSITĂȚILOR DIN U.S.A. 1994

Prof. *GABRIEL NECULA*, Colegiul Tehnic « Gheorghe Lazăr », Plopeni, Prahova

Scopul acestei note este generalizarea următoarelor probleme :

Problema1. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ astfel încât matricele $A, A+B, A+2B, A+3B$ şi $A+4B$ sunt toate inversabile, inversele lor având elemente numere întregi.Să se arate că matricea $A+5B$ este inversabilă şi inversa ei are de asemenea elemente numere întregi.

Concursul anual "W.L.Putnam " al univesităţilor din S.U.A., 1994

Problema 2. Fie $A, B \in M_3(\mathbb{Z})$ astfel încât matricele $A+kB$ sunt inversabile, pentru orice $k \in \overline{0,6}$, inversele lor având elemente numere întregi.Să se arate că matricea $A+2000B$ este inversabilă şi inversa ei are elemente numere întregi.

Dorinel Anca, C : 2196, G.M. 9/1999

Vom demonstra, mai întâi, următorul rezultat:

Fie numerele întregi, diferite a_0 , a_1 , a_2 , $a_3,\ldots,a_n$ astfel încât $|a_i - a_0| \geq 3$ pentru orice $i = \overline{1,n}$ şi $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3,\ldots,\varepsilon_n \in \{-1,1\}$ atunci sistemul de ecuaţii

$$(1)\qquad \begin{cases} x_0 + a_0 x_1 + a_0^2 x_2 + \ldots + a_0^n x_n = \varepsilon_0 \\ x_0 + a_1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n = \varepsilon_1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_0 + a_n x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n = \varepsilon_n \end{cases}$$

admite soluţia unică în $\mathbb{Z}$ $x_0 = \varepsilon_0$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Demonstaţie. Deoarece $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{0, n}$ sunt diferite determinantul matricei siste - mului, de tip Vandermonde, este nenul ; rezultă sistemul (1) , sistem Cramer cu soluţie unică; în sistemul (1) scădem prima ecuaţie din celelalte; se obţin n ecuaţii de forma:

$(a_i - a_0)[x_1 + (a_i + a_0)x_2 + \ldots + (a_i^{n-1} + a_i^{n-2}a_0 + \ldots + a_0^{n-1})x_n] = \varepsilon_i - \varepsilon_0$, $i = \overline{1, n}$;

deoarece $|a_i - a_0| \geq 3$ şi $\varepsilon_i - \varepsilon_0 \in \{ -2, 0, 2 \}$, $i = \overline{1, n}$ rezultă $\varepsilon_i = \varepsilon_0$ pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Avem $\Delta_{x_0} = \varepsilon_0 \cdot \det A$, $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \ldots = \Delta_{x_n} = 0$; soluţia sistemului este $x_0 = \varepsilon_0$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Acum vom formula enunţul care generalizează şi întăreşte problemele unu şi doi :

Fie a_0 , a_1 , a_2 , $a_3, \ldots, a_n$ şi p, numere întregi, diferite, astfel încât $|a_i - a_0| \geq 3$ pentru orice $i = \overline{1, n}$. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$ astfel încât matricele $A + a_i B$, $i = \overline{0, n}$ sunt inversa-bile, inversele lor având elemente numere întregi. Să se arate că matricea $A + pB$ este in -versabilă şi inversa ei are elemente numere întregi.

Soluţie. Matricele $A + a_i B$ *fiind inversabile în* $M_n(\mathbb{Z})$ *au determinantul egal cu 1 sau – 1.Din enunţ, obţinem sistemul de n + 1 ecuaţii* $\det(A + a_i B) = \det A + a_i \alpha_1 + a_i^2 \alpha_2 + \ldots + a_i^{n-1} \alpha_{n-1} + a_i^n \det B = \varepsilon_i$, $i = \overline{0, n}$, $\varepsilon_i \in \{ -1, 1 \}$, *care admite soluţia unică în* $\mathbb{Z}$ *conform rezultatului mai sus demonstrat:* $\det A = \varepsilon_0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = \det B = 0$.*Deci* $\det(A + pB) = \varepsilon_0$ *şi matricea* $A + pB$ *este inversabilă şi înversa ei are elemente numere întregi.*

Observaţie. Pentru $n = 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $p = 5$ *se întăreşte Problema 1.*

Pentru $n = 3$, $a_0 = 5$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $p = 2000$ se întăreşte Problema 2.

Bibliografie

[1] Colecţia Gazeta matematica publicaţie lunara pentru tineret
[2] Internet