

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010**

**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**BAREM DE CORECTARE CLASA a IX-a**

1. a) Dacă  $x, y, z$  reprezintă numărul de cutii de câte 6, 9, respectiv 20 bucăți trebuie să avem:  $6x + 9y + 20z = 33$  .....1p

Este necesar ca  $z \in \{0,1\}$  .....2p

Din  $z = 0 \Rightarrow 2x + 3y = 11 \Rightarrow (x, y) \in \{(1,3);(4,1)\}$  .....1p

Din  $z = 1 \Rightarrow 6x + 9y = 13$  (Fals).....1p

b) Dacă  $6x + 9y + 20z = 43 \Rightarrow z \in \{0,1,2\}$  .....1p

$z = 0 \Rightarrow 6x + 9y = 43$  (fals) }  
Din  $z = 1 \Rightarrow 6x + 9y = 23$  (fals) } .....1p  
 $z = 2 \Rightarrow 2x + 3y = 1$  (fals) }

2.  $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 5 \cdot (a_1 + a_{10})$  .....1p

$a_{10} = \frac{18}{r} + 9r$  .....1p

**VARIANTA 1**

$S = 5 \left( 9r + \frac{36}{r} \right) = 45 \cdot \left( r + \frac{4}{r} \right)$  .....2p

$S = 45 \cdot \left[ \left( \frac{2}{\sqrt{r}} - \sqrt{r} \right)^2 + 4 \right]$  .....1p

$S_{\min} = 180$ , pentru  $r = 2$  .....1p

Rezultă: 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27.....1p

**VARIANTA 2**

$S = 45 \cdot \left( \frac{4}{r} + r \right) \geq 45 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{r} \cdot r} = 180$  (inegalitatea mediilor).....1p

$S_{\min} = 180$  pentru  $r = 2$  .....1p

Rezultă: 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27.....1p

**3. VARIANTA 1**

Ridicăm la pătrat ecuațiile sistemului, apoi le adunăm membru cu membru și obținem:  $x^2 + y^2 + z^2 - 4 \cdot (xy + yz + zx) + 4 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = 1$  .....3p

Avem  $5 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) - 4 \cdot (xy + yz + zx) = 1$  (\*)

Dar :  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$  (\*\* ) .....2p

**NOTĂ**

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010**

**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

Din (\*) și (\*\*) $\Rightarrow$

$$5 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = 1 + 4 \cdot (xy + yz + zx) \leq 1 + 4(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \dots\dots\dots 2p$$

**VARIANTA 2**

$$\begin{cases} x - 2y = a \\ y - 2z = b / \cdot 2 \\ z - 2x = c / \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{7}(a + 2b + 4c) \dots\dots\dots 1p$$

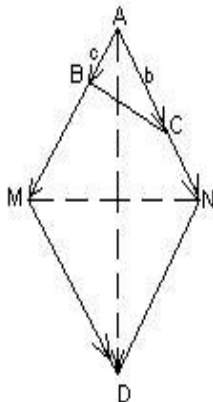
$$\begin{cases} x - 2y = a / \cdot 4 \\ y - 2z = b \\ z - 2x = c / \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{7} \cdot (4a + b + 2c) \dots\dots\dots 1p$$

$$\begin{cases} x - 2y = a / \cdot 2 \\ y - 2z = b / \cdot 4 \\ z - 2x = c \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{1}{7} \cdot (2a + 4b + c) \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{49} \cdot [21 + 28 \cdot (ab + bc + ca)] \dots\dots\dots 2p$$

Cum:  $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \dots\dots\dots 2p$

**4.**



a)  $|\overrightarrow{AM}| = b \cdot |\overrightarrow{AB}| = bc; |\overrightarrow{AN}| = c \cdot |\overrightarrow{AC}| = bc \dots\dots\dots 2p$

b)  $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = -b \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC} = c \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} \dots\dots\dots 2p$

$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AN} \Rightarrow (MD) \equiv (AN)$  și  $MD \parallel AN$ ,  
de unde AMDN paralelogram..... 1p

c) AMDN paralelogram și  $(AM) \equiv (AN) \Rightarrow AMDN$  este romb..... 1p

Rezultă  $(AD)$  bisectoarea  $\widehat{BAC}$  ..... 1p

**NOTĂ**

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010**  
**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**BAREM DE CORECTARE CLASA a X-a**

**1.**

Fie  $x, y, z$  numărul jetoanelor pe care sunt scrise numerele 5, 7, respectiv 11.

a)  $5x + 7y + 11z \neq 13, \forall x, y, z \in \mathbb{N} \Rightarrow$  numărul 13 nu este **norocos** .....2p

b)  $14 = 2 \cdot 7; 15 = 3 \cdot 5; 16 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 11; 17 = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 7; 18 = 1 \cdot 7 + 1 \cdot 11 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 14, 15, 16, 17, 18$  sunt numere **norocoase** .....2p

14 - norocos  $\Rightarrow$  19 - norocos ( $19 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7$ )

15 - norocos  $\Rightarrow$  20 - norocos ( $20 = 4 \cdot 5$ )

c) 16 - norocos  $\Rightarrow$  21 - norocos ( $21 = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 11$ ) } .....2p

17 - norocos  $\Rightarrow$  22 - norocos ( $22 = 3 \cdot 5 + 1 \cdot 7$ )

18 - norocos  $\Rightarrow$  23 - norocos ( $23 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 11$ )

Așadar din  $n$ -**norocos**, deducem că și  $(n + 5)$  este **norocos** și apoi,

din aproape în aproape (inductiv), rezultă că orice număr natural  $n \geq 14$

este **norocos** .....1p

**2.** Primul membru al egalității este  $\log_A(abc)$  .....1p

$(ab)^\alpha = A^2 \Rightarrow \alpha \cdot \log_A(ab) = 2 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \log_A(ab)$  .....1p

$(bc)^\beta = A^2 \Rightarrow \beta \cdot \log_A(bc) = 2 \Rightarrow \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2} \cdot \log_A(bc)$  .....1p

$(ac)^\gamma = A^2 \Rightarrow \gamma \cdot \log_A(ac) = 2 \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{2} \cdot \log_A(ac)$  .....1p

Adunând aceste egalități membru cu membru, obținem:

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \log_A(abc)$  .....2p

**3.** a)  $7 - 2\sqrt{x} - x > 0$ . Cu  $x \geq 0$ , notăm  $\sqrt{x} = t$  .....1p

$t^2 + 2t - 7 < 0$  și  $t \geq 0$  implică  $t \in [0, 2\sqrt{2} - 1)$  .....1p

Din  $t \in [0, 2\sqrt{2} - 1) \Rightarrow x \in [0, 9 - 4\sqrt{2})$  .....1p

**NOTĂ**

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010**

**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

b)  $x \in \left[ 0, 9 - 4\sqrt{2} \right) \left. \vphantom{x} \right\} \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3\} \dots\dots\dots 2\text{p}$   
 $x \in \mathbb{Z}$

$f(0) = \log_{\sqrt{3}-1} 7, f(1) = \log_{\sqrt{3}-1} 4, f(2) = \log_{\sqrt{3}-1} (5 - 2\sqrt{2}) \notin \mathbb{Z} \dots\dots\dots 1\text{p}$

$f(3) = \log_{\sqrt{3}-1} (4 - 2\sqrt{3}) = \log_{\sqrt{3}-1} (\sqrt{3} - 1)^2 = 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

Punctul  $A(3, 2) \in G_f \dots\dots\dots 1\text{p}$

**4.**

a) Prin ridicare la pătrat inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu:

$2 + 2|\cos x| \leq 4 \Leftrightarrow |\cos x| \leq 1$  (adevărat).....3p

b)  $2^x + 2^{-x} \leq 2 \dots\dots\dots 1\text{p}$

Obținem  $(2^x - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow x = 0 \dots\dots\dots 3\text{p}$

**NOTĂ**

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010**  
**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**BAREM DE CORECTARE CLASA a XI-a**

1. Fie  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$\det(A - 3I_2) = ad - bc - 3(a + d) + 9 \dots\dots\dots 1p$

$\det(A + 2I_2) = ad - bc + 2(a + d) + 4 \dots\dots\dots 1p$

Obținem  $\begin{cases} ad - bc - 3(a + d) = -5 \\ ad - bc + 2(a + d) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + d = 2 \\ ad - bc = 1 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$

$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$

$\left. \begin{array}{l} a^2 + bc = a^2 + ad - 1 = a(a + d) - 1 = 2a - 1 \\ ab + bd = b(a + d) = 2b \\ ac + cd = c(a + d) = 2c \\ bc + d^2 = ad + d^2 - 1 = d(a + d) - 1 = 2d - 1 \end{array} \right\} \dots\dots\dots 1p$

$A^2 = \begin{pmatrix} 2a - 1 & 2b \\ 2c & 2d - 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2A - I_2 \dots\dots\dots 1p$

2. Determinantul are  $n^2$  elemente, dintre care  $(n^2 - n + 2)$  egale cu  $\alpha$  și cel mult  $(n - 2)$  elemente diferite de  $\alpha \dots\dots\dots 3p$

Există două linii(coloane) pe care toate elementele sunt egale cu  $\alpha \dots\dots\dots 2p$

În caz contrar ar exista cel puțin  $(n - 1)$  linii(coloane) cu măcar un element diferit de  $\alpha$  și deci cel puțin  $(n - 1)$  elemente diferite de  $\alpha$  (fals)  $\dots\dots\dots 2p$

3.

a)  $f(0 - 0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{2^{\frac{1}{x}} - 2} = -\frac{1}{2} \dots\dots\dots 1p$

$f(0 + 0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{2^{\frac{1}{x}} - 2} = 0 \dots\dots\dots 1p$

**NOTĂ**

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010**

**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

$$f(1-0) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{2^{\frac{1}{x}} - 2} = \infty \dots\dots\dots 1p$$

$$f(1+0) = \lim_{x \searrow 1} \frac{1}{2^{\frac{1}{x}} - 2} = -\infty \dots\dots\dots 1p$$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0 \Rightarrow [e^{-x}] = 0$ , pentru  $x$  suficient de mare  $\Rightarrow l_1 = 0 \dots\dots\dots 1p$

$$e^x - 1 < [e^x] \leq e^x \dots\dots\dots 1p$$

Rezultă:  $1 - e^x < e^{-x} [e^x] \leq 1$ , de unde, trecând la limită și ținând cont de teorema "cleștelui", obținem  $\Rightarrow l_2 = 1 \dots\dots\dots 1p$

**4. Reducere la absurd** ..... 1p

Pentru  $|x|$  suficient de mare avem:

$$\frac{P(x)}{x^2 \cdot Q(x)} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \dots\dots\dots 1p$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1 \dots\dots\dots 1p$$

Obținem:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{x^2 \cdot Q(x)} = 1 \dots\dots\dots 1p$

Deducem : grad  $P = 2 +$  grad  $Q$  și  $a_0 = b_0 \dots\dots\dots 1p$

Rezultă :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{x^2 \cdot Q(x)} = 1 \dots\dots\dots 1p$

Cum  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = -1$ , se obține contradicție..... 1p

**NOTĂ**

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010**  
**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**BAREM DE CORECTARE CLASA a XII-a**

**1.**

a) Dem. asociativitatea și comutativitatea .....1p

Determină elementul neutru  $e = 0 \in G$  .....1p

Determină elementul simetric elementului  $x \in G$  este  $x' = -\frac{x}{1+x} \in G$  .....1p

b)  $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{n \text{ ori}} = (x+1)^n - 1, n \in \mathbb{N}^*$  .....1p

$(x+1)^n = 2 \Rightarrow x = \sqrt[n]{2} - 1 \in G$  .....1p

c)  $\begin{cases} x = a^2 - 1 \\ y = b^2 - 1 \end{cases} \in H \Rightarrow x * y = (x+1)(y+1) - 1 = (ab)^2 - 1 \in H$  .....1p

Dacă  $x = a^2 - 1 \in H \Rightarrow x' = -\frac{x}{1+x} = \frac{1-a^2}{a^2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 1 \in H$  .....1p

2. a)  $t = \frac{1}{u} \Rightarrow dt = -\frac{1}{u^2} du$  și verifică egalitatea .....2p

b) Din a)  $\Rightarrow \arctg t \Big|_x^1 = \arctg t \Big|_{\frac{1}{x}}^1 \Rightarrow \arctg x + \arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, x > 0$  .....2p

c)  $x = \frac{1}{t} \Rightarrow I(a) = -\int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\arctg\left(\frac{1}{t}\right)}{t} dt$  .....1p

$I(a) = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctg t\right) dt$  .....1p

$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln t \Big|_{\frac{1}{a}}^a - I(a) \Rightarrow I(a) = \frac{\pi}{2} \ln a$  .....1p

3. a)  $(4x^3 - 6x^2 + 8x - 3) : (x^2 - x + 1)$  dă câtul  $(4x - 2)$  și restul  $(2x - 1)$ .

Așadar:  $4x^3 - 6x^2 + 8x - 3 = 2(2x - 1)(x^2 - x + 1) + (2x - 1)$  .....1p

$I = 2 \cdot \int_0^2 \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} dx + \int_0^2 \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^3} dx$  .....1p

**NOTĂ**

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010**

**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

$$I_1 = \int_0^2 \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} dx = -\frac{1}{x^2-x+1} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} \dots\dots\dots 1p$$

$$I_2 = \int_0^2 \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^3} dx = -\frac{1}{2(x^2-x+1)} \Big|_0^2 = \frac{4}{9}$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{16}{9} \dots\dots\dots 1p$$

b)  $I(x) = \int x' \cdot e^{x+\frac{1}{x}} dx + \int \left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot e^{x+\frac{1}{x}} dx \dots\dots\dots 1p$

$$I(x) = xe^{x+\frac{1}{x}} dx - \int x \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx + \int \left(x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx \dots\dots\dots 1p$$

$$I(x) = xe^{x+\frac{1}{x}} + C \dots\dots\dots 1p$$

VARIANTĂ (pentru punctul b)

$$\left(1+x-\frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} = \left[1+x\left(x+\frac{1}{x}\right)'\right] e^{x+\frac{1}{x}} \dots\dots\dots 1p$$

Expresia de mai sus este  $\left(x \cdot e^{x+\frac{1}{x}}\right)'$  ..... 1p

Deci  $I(x) = xe^{x+\frac{1}{x}} + C \dots\dots\dots 1p.$

**4.** Elevul poate colora toate punctele de coordonate întregi situate pe dreptele de ecuații:  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1 \dots\dots\dots 3p$

Considerând punctele  $M_k(k, 0)$  și  $N_k(k, 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  elevul poate colora toate punctele de ordonată întreagă de pe dreptele de ecuații  $x = k$ ,  $k \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 4p$

**NOTĂ**

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.