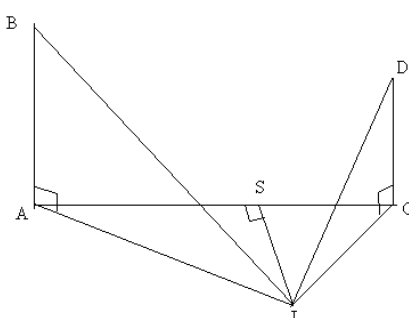


CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX A

1. Avem că $3b^2 = a \cdot \overline{ab}$, prin urmare $10a^2 + ab - 3b^2 = 0$ 3p
 Rezultă că $(5a + 3b)(2a - b) = 0$; cum $5a + 3b \neq 0$, întrucât a, b sunt cifre și $a \neq 0$, 2p
 obținem că $b = 2a$
 Numere căutate sunt 12, 24, 36 și 48 2p
2. Cateta AB, opusă unghiului \hat{C} de măsură 30° , este egală cu jumătate din ipotenuză, deci $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$. Din teorema bisectoarei, obținem că $\frac{AE}{EC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}$ 4p
 ...
 Astfel, $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BP}{PA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{3} = 1$ și concurența dreptelor CP, AD și BE urmează conform reciprocei teoremei lui Ceva. 3p
3.  Notăm cu AB și CD înălțimile celor doi brazi și cu I poziția iepurelui. Din triunghiurile dreptunghice BAI și CDI, obținem că $AI = 21\text{m}$, iar $CI = 20\text{m}$ 3p
 Dacă $AS = x$, $IS = h$, din triunghiurile dreptunghice SAI și SCI găsim că $x^2 + h^2 = 441$, respectiv $(13 - x)^2 + h^2 = 400$. Scăzând membru cu membru, deducem că $x = \frac{105}{13}\text{m}$, apoi $h = \frac{252}{13} \approx 19,38\text{m}$ 4p
4. Notăm cu x numărul numerelor 1,1 rămase și cu y numărul numerelor 1,11 rămase; atunci $1,1 \cdot x + 1,11 \cdot y = 19,93$, adică $110x + 111y = 1993$. Urmărind ultima cifră, deducem că y se termină în 3 3p
 Pe de altă parte $y \leq 20$, prin urmare $y \in \{3, 13\}$. Verificând, reținem doar valoarea $y = 13$, când $x = 5$. Astfel Lucică cel obraznic a șters 15 de 1,1 și 7 de 1,11, în total 22 de numere 4p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A X A

1. a) Impunem condițiile $x \geq 0, 1-x \geq 0, \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \neq 0$ și $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} \neq 0$;
 obținem că $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 2 p
- b) $E(x) = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) - (\sqrt{x} - \sqrt{1-x})}{(\sqrt{x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2\sqrt{1-x}}{2x-1}$ 3p
- c) Cum $2\sqrt{1-x} \geq 0, \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, se impune condiția $2x - 1 < 0$.
 Obținem soluția $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ 2p
2. Observăm că $\lg(\operatorname{tg}1^0) + \lg(\operatorname{tg}89^0) = \lg(\operatorname{tg}1^0 \cdot \operatorname{tg}89^0) = \lg(\operatorname{tg}1^0 \cdot \operatorname{ctg}1^0) = \lg 1 = 0$ 4p
 Grupând câte doi termenii egal depărtați de capete și procedând analog, obținem 44 de perechi cu suma 0. Rămâne în mijloc termenul $\lg(\operatorname{tg}45^0) = \lg 1 = 0$.
 În concluzie, $S = 0$ 3p
3. a) De exemplu $z_1 = 1, z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4p
- b) $(w_1 + w_2 + w_3)^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + 2w_1w_2 + 2w_1w_3 + 2w_2w_3 \Rightarrow$ 1p
 $\Rightarrow (w_1 + w_2 + w_3)^2 = 2w_1w_2w_3 \left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} \right) \Rightarrow$
 $\Rightarrow |w_1 + w_2 + w_3|^2 = 2|w_1| \cdot |w_2| \cdot |w_3| \cdot |\overline{w_1} + \overline{w_2} + \overline{w_3}| \Rightarrow$
 $\Rightarrow |w_1 + w_2 + w_3|^2 = 2|\overline{w_1 + w_2 + w_3}| = 2|w_1 + w_2 + w_3| \Rightarrow |w_1 + w_2 + w_3| = 2$
 (Am folosit $w_1 + w_2 + w_3 \neq 0$) 2p
4. Colorăm alternativ cu alb și negru cele șase sectoare de disc. Inițial, trei dintre pioni sunt pe negru și trei sunt pe alb. La o mutare, doi dintre pioni își schimbă culoarea sectorului pe care se află..... 3p
 În urma unei mutări, rămân un număr impar de pioni pe negru și un număr impar de pioni pe alb. Rezultă astfel că nu este posibil să adunăm toți cei șase pioni pe o aceeași culoare. 4p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A XI A

1. a) Dacă $\det A \neq 0$, atunci A este inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Presupunând că $f(X_1) = f(X_2)$, unde $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$, rezultă că $AX_1 = AX_2$, de unde $A^{-1}AX_1 = A^{-1}AX_2$, deci $X_1 = X_2$, ceea ce justifică injectivitatea funcției f 4p
- b) Când $\det A \in \{-1, 1\}$, inversa A^{-1} a matricei A are tot elemente întregi. Pentru orice $Y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$, ecuația $f(X) = Y$ are unica soluție $X = A^{-1}Y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$, prin urmare f este bijectivă. 3p
2. a) $-B^t = -(A - A^t)^t = -(A^t - (A^t)^t) = -(A^t - A) = A - A^t = B$ 3p
- b) Cum $\det B = \det B^t$, avem că $\det B = \det (-B^t) = (-1)^3 \det B^t = -\det B$.
 Rezultă că
 $2\det B = 0$, deci $\det B = 0$ 4p
3. Observăm că $S_n = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right)$, prin urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}$ 4p
- Apoi, $P_n = (1 + \sqrt{2}) \cdot \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} = (1 + \sqrt{2}) \left(2 - \frac{1}{2^n} \right)$ și atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 2 + 2\sqrt{2}$ 3p
4. a) Avem că $a_{n-1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{\sqrt{n(n+1)} - (n-1)}{2\sqrt{n+1}}$. Cum $n(n+1) > (n-1)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $a_{n+1} - a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict crescător 3p
- b) Observăm că $a_n > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{\sqrt{n}}{2}$. Considerând, de exemplu, $n = 4020^2$, obținem că $a_{4020^2} > \frac{4020}{2} = 2010$ 2p
- c) Cum $a_n > \frac{\sqrt{n}}{2}$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, prin urmare șirul dat este divergent.... 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII A

1. a) $F'(x) = -\frac{1}{x^2} \left[1 - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] + \left(1 + \frac{1}{x} \right) \left[-\frac{x}{x+1} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right] =$
 $= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x^2} = f(x), \forall x \in (0, \infty)$ 4p

b) $\int_1^e f(x)F(x)dx = \frac{1}{2} \int_1^e 2F(x) \cdot F'(x)dx = \frac{F^2(x)}{2} \Big|_1^e =$
 $= \frac{(e+1)^2}{2e^2} (2 - \ln(1+e))^2 - 2(1 - \ln 2)^2$ 3p

2. a) Verificarea axiomelor 4p

b) Pentru orice element nenul x al lui $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, avem că $x + x = (\hat{0}, \hat{0})$, în timp ce doar unul dintre elementele nenule ale lui \mathbb{Z}_4 are această proprietate (anume $\hat{2}$). Rezultă că cele două grupuri nu sunt izomorfe 3p

3. $(A, E, C): (\mathbb{R}, +)$ 1p

$(A, E, \bar{C}): (S_n, \cdot)$ 1p

$(A, \bar{E}, C): (\mathbb{Z}, *)$, unde $x * y = 5xy + 5x + 5y + 4$ 1p

$(\bar{A}, E, C): (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), *)$, unde $A * B = AB + BA$ 1p

$(\bar{A}, \bar{E}, C): (\mathbb{R}_+^*, *)$, unde $x * y = \frac{x+y}{2}$ 1p

$(\bar{A}, E, \bar{C}): (M, *)$, unde $M = \{a, b, c, d\}$, iar tabla operației „*” este

*	a	b	c	d	
a	a	b	c	d	
b	b	d	d	d	
c	c	c	c	c	
d	d	b	b	b 1p

$(A, \bar{E}, \bar{C}): (M, *)$, unde M este mulțimea cuvintelor cu opt litere alese dintr-un alfabet cu n litere, iar pentru $x = a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8$ și $y = b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8$, definim $x * y = a_1a_2a_3a_4a_5b_6b_7b_8$ 1p

Orice altă rezolvare se punctează corespunzător.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Profil real, specializarea științele naturii

4. Cu schimbarea de variabilă $x = t^2$, obținem că

$$\int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+3)} dx = \int_1^3 \frac{2 \ln t}{t \cdot (t^2+3)} 2t dt = 4 \cdot \int_1^3 \frac{\ln t}{t^2+3} dt \dots\dots\dots 3p$$

Făcând schimbările de variabilă $t = \frac{1}{s}$ și apoi $3s = y$, avem că

$$I = \int_1^3 \frac{\ln t}{t^2+3} dt = -\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln s}{3s^2+1} ds = -\int_1^3 \frac{\ln y - \ln 3}{y^2+3} dy = -I + \ln 3 \int_1^3 \frac{1}{y^2+3} dy,$$

prin urmare $2I = \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{3}} \Big|_1^3 = \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi \ln 3}{6\sqrt{3}}.$

În concluzie, valoarea integralei din enunț este $\frac{\pi \ln 3}{3\sqrt{3}} \dots\dots\dots 4p$