CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX-A

1.

a) În relația din enunț facem

$x \to 1-x \Rightarrow 2\,f(1-x)+3f(x)=-2x+1$ 1p

Rezolvă sistemul $\begin{cases} 2\,f(x)+3f(1-x)=2x-1 \\ 2\,f(1-x)+3f(x)=-2x+1 \end{cases}$ şi obține $f(x)=-2x+1$ 2p

b) Reprezentarea grafică 1p

Aria triunghiului determinat de graficul funcției si cele doua axe este $\frac{1}{4}$ 1p

Valoarea tangentei este 2 .... 1p

Distanța de la originea axelor la reprezentarea grafică a funcției f este $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 1p

2.

a) Eliminând numitorii se obține $\alpha+\alpha\beta \le \beta+\beta\alpha \Rightarrow \alpha \le \beta$ care este adevărată 3p

b) Înlocuind $\alpha = a$ şi $\beta = b+c$ în relația de la pct.a) obținem $\frac{a}{1+a} \le \frac{b+c}{1+b+c}$ 1p

Demonstrează că $\frac{b+c}{1+b+c} \le \frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$ 2p

Din cele două inegalități obține $\frac{a}{1+a} \le \frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$ 1p

3.

a) Discriminantul primei ecuații este $\Delta_1 = 4\left(m^2-9\right)$ 1p

Discriminantul celei de-a doua ecuații este $\Delta_2 = 8\left(9-m^2\right)$ 1p

Observă că $\Delta_1 = 0 \Leftrightarrow \Delta_2 = 0$ de unde $m = \pm 3 \Rightarrow A = \{-3\}$ sau $A = \{\pm 3\}$ 1p

Dacă $\Delta_1 > 0 \Rightarrow \Delta_2 < 0$ sau $\Delta_1 < 0 \Rightarrow \Delta_2 > 0$ deci mulțimea A are două elemente 1p

b) $S = 4+9+14+...+2009 \Rightarrow S = \frac{(4+2009)\cdot 402}{2} \Rightarrow S = 404613$ 1p

Numerele căutate sunt 5, 15, 25, ..., 2005 adică $(2005 - 5):10+1=201$ numere 1p

Calculează probabilitatea $P = \frac{201}{2011}$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera teoretică, profil umanist

4.

a) Notăm x = prețul de la primul magazin, deci la cel de-al doilea prețul va fi $\frac{110}{100}\cdot x$ ..1p

Prețul la cel de-al treilea magazin va fi $\frac{90}{100}\cdot\frac{110}{100}\cdot x=\frac{99}{100}\cdot x$ ………………………… 1p

Deci prețul cel mai mic este la cel de-al treilea magazin …………………………….. 1p

b)Volumul cubului inițial este $8^3 cm^3$ iar a unui cub obținut după secționare este $8^3 : 2^3 = 64$ ………………………………………………………………………….. 1p

Numărul de cuburi obținute după secționare este $8^3 : 2^3 = 64$ ………………………….1p

Sunt 64·6=384 fețe din care 16·6=96 sunt vopsite, deci 288 de fețe sunt nevopsite …. 1p

Cantitatea de vopsea necesară este de $\frac{288\cdot 160}{96}=480g$ ……………………………… 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A X-A

1.

a) Din inegalitatea mediilor $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{ab}{a+b} \le \frac{a+b}{4}$ 1p

b) Din punctul a) avem $\frac{ab}{a+b} \le \frac{a+b}{4}$ şi analog $\frac{bc}{b+c} \le \frac{b+c}{4}, \frac{ca}{c+a} \le \frac{c+a}{4}$ ………… 1p

Adunând relațiile obtinem $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \le \frac{a+b+c}{2}$ ...………………………. 1p

Egalitatea are loc dacă a = b = c …………………………………………………… 1p

c) Notează $2^x = a, 3^x = b, 5^x = c$ ………………………………………………..…......... 1p

Obținem $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} = \frac{a+b+c}{2}$ …………………………………………………… 1p

Folosind a) obținem a = b = c, deci $2^x = 3^x = 5^x \Rightarrow x = 0$ ……………………………….. 1p

2.

a) Notăm $\log_2 m = a \Rightarrow f(x) = \sqrt{ax^2 - (1+2a)x + 1 + 2a}$ 1p

Obținem condițiile

$$\begin{cases} \Delta \le 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4a^2 \le 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$ 2p

Din $a \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \Rightarrow \log_2 m \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \Rightarrow m \in \left[\sqrt{2}, +\infty\right)$ ……….……………………… 1p

b) Punem condițiile x, y > 0 şi notează $x\sqrt{y} = a, y\sqrt{x} = b$ 1p

Sistemul devine

$$\begin{cases} a - b = 30 \\ a^2 + b^2 = 2900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 50 \\ b = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{y} = 50 \\ y\sqrt{x} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = 2500 \\ y^2 x = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 4 \end{cases}$$ 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera teoretică, profil umanist

3.

a)Etapa verificării 1p

Etapa demonstrației $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ 2p

b)$S = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 7^2 + ... + 44^2$ 1p

$S = \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + ... + 44^2\right) - \left(3^2 + 6^2 + 9^2 + ... + 42^2\right)$ 1p

$S = \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + ... + 44^2\right) - 3^2\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 7^2\right) \Rightarrow S = 28110$ ... 2p

4.

a) Se observă ca diametrele pieselor sunt dimensiunile unui triunghi dreptunghic …… 1p

Prin urmare, greutatea piesei mai mari este echivalentă cu suma greutăților celorlalte două piese 1p

Bijutierul taie fiecare piesă în jumătate, formează câte o jumatate din cercul mic cu o jumătate din cercul mijlociu, iar jumătățile cercului mare formează celelalte două părți 1p

b) Începând cu al doilea pătrat se formează o progresie aritmetică cu rația 8 (plăci) 2p

Pentru cel de-al 11-lea pătrat Remus are nevoie de $(11-1) \cdot 8 = 80$ plăci 1p

Doru a pus $8 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 5 + ... + 8 \cdot 19 = 800$ plăci 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE A XI-A

1. Fie T=totalul elevilor, A=mulțimea participanților la cercul de matematică și B= mulțimea participanților la cercul de informatică.

$|A| = 70\%T = \frac{7}{10}T,\ |B| = 45\%T = \frac{9}{20}T$ **2p**

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ **1p**

$T = \frac{7}{10}T + \frac{9}{20}T - 42 \Leftrightarrow T = \frac{23}{20}T - 42 \Leftrightarrow \frac{3}{20}T = 42$ **3p**

Finalizare $T = 280$ elevi **1p**

2. a) Calculează media clasei a X-a A:

$$m_1 = \frac{5\cdot 2 + 6\cdot 5 + 7\cdot 5 + 8\cdot 5 + 9\cdot 5 + 10\cdot 2}{2+5+5+5+5+2} = 7{,}50$$ **1,5p**

Calculează media clasei a X-a B:

$$m_2 = \frac{4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 6\cdot 4 + 7\cdot 2 + 8\cdot 7 + 9\cdot 8 + 10\cdot 6}{1+2+4+2+7+8+6} = 8$$ **1,5p**

Deci clasa a X-a B este mai bună.

b) Calculăm dispersiile celor două serii.

Clasa a X-a A:

Nota	5	6	7	8	9	10
Abaterea $\lvert x_i - m_1 \rvert$	2,50	1,50	0,50	0,50	1,50	2,50

Dispersia:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1)^2 \cdot p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} =$$

$$= \frac{6{,}25\cdot 2 + 2{,}25\cdot 5 + 0{,}25\cdot 5 + 0{,}25\cdot 5 + 2{,}25\cdot 5 + 6{,}25\cdot 2}{2+5+5+5+5+2} = 2{,}08$$ ....**2p**.

Clasa a X-a B:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Abaterea $\lvert x_i - m_2 \rvert$	4	3	2	1	0	1	2

Dispersia:

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera teoretică, profil umanist

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1)^2 \cdot p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} =$$

$\frac{16\cdot 1 + 9\cdot 2 + 4\cdot 4 + 1\cdot 2 + 0\cdot 7 + 1\cdot 8 + 4\cdot 6}{1+2+4+2+7+8+6} = 2,8$ **2p**

Prin urmare clasa a X-a A este mai omogenă.

3. a) Nr. Noduri=10, Nr.circuite elementare=6, Nr. muchii=15 ....**3p**

b) Presupunem prin reducere la absurd contrariul. Atunci Nr. Noduri=5,
Nr. Muchii=$C_5^2 = 10$, deci înlocuind în formula de mai sus obținem Nr. Circuite elementare=6. ....**2p**

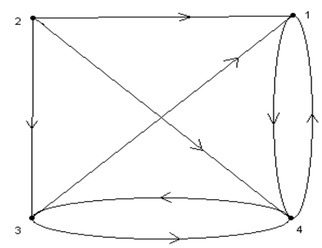
Fie A,B,C,D patru dintre cele cinci vârfuri ale grafului. Dacă al cincilea vârf E se află în exteriorul tetraedrului ABCD obținem 10 circuite elementare.
La fel dacă E se află în exteriorul tetraedrului ABCD. Dacă E se află pe o față a tetraedrului obținem 9 circuite elementare.
Deci presupunerea făcută este falsă.. **2p**

4. Media s-a obținut împărțind suma notelor la 50.
Deci suma notelor obținute este $N = 50 \cdot 5,02 = 251$ **4p**
Adăugând câte un punct pentru fiecare lucrare suma notelor devine 251 + 50 = 301...**2p**
Deci media corectă este 301 : 50 = 6,02 ....**1p**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII-A

1. a) Graful asociat matricei este



....**3p**

b) Calculăm puterile matricei A şi avem:

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\2&0&1&2\\1&0&1&1\\1&0&0&2\end{pmatrix}, \text{ respectiv } A^3=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\3&0&2&3\\2&0&1&2\\2&0&2&1\end{pmatrix}$$ **3p**

Aşadar avem 21 drumuri de lungime trei..**1p**

2. a) $A^t=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\\a_3&b_3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}a_1^2+a_2^2+a_3^2 & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & b_1^2+b_2^2+b_3^2\end{pmatrix}$ **2p**

$B=\begin{pmatrix}14&28\\28&56\end{pmatrix}$ **1p**

b) $\det(B)=\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2=$

$=\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2+\left(a_1b_3-a_3b_1\right)^2+\left(a_2b_3-a_3b_2\right)^2\geq 0$ (Lagrange) **4p**

3.

a) $(a,15)$ ideala $\Rightarrow a^2-675=1\Rightarrow a=\pm 26$ **3p**

b) Pentru (a, b), (c, d) ideale avem ac + 3bd, ab + bc $\in\mathbb{Z}$ **1p**

şi $(ac+3bd)^2-3(ad+bc)^2=\left(a^2-3b^2\right)\left(c^2-3d^2\right)=1$, deci $(a,b)*(c,d)$, ideală **3p**

4. Fie $a*b=ab-2a-2b+6=(a-2)(b-2)+2$ **2p**

Legea "$*$" este asociativă şi comutativă **2p**

$a*2=2,\ \forall a\in\mathbb{R}$ **2p**

Dup 99 de paşi avem $1*2*...*100=2$ **1p**