

CONCURSUL REZOLVATORILOR ³⁾

CLASA a V-a

1. O carte *ciudată* are paginile numerotate astfel: 16, 23, 30, 37, 44, ... , 2011.
 - a) Aflați câte foi are cartea *ciudată*.
 - b) Determinați câte cifre s-au folosit pentru numerotarea cărții *ciudate*.
 - c) Calculați suma numerelor înscrise pe foaia din mijlocul cărții.
Concursul „ Florica Câmpan”, 2011

2. Un măgar și un catâr încărcăți cu saci urcă un deal. Măgarul se vâita sub povara grea. Observându-l, catârul îi spune: „De ce te vâiți bătrâne? Dacă mi-ai da un sac aş avea de două ori mai mulți saci ca tine, iar dacă mi-ai lua un sac am avea povară egală.” Câți saci a dus fiecare?
O.M. Harghita, 2008

3. Într-o cameră sunt taburete și scaune. Un taburet are 3 picioare, iar un scaun are 4 picioare. Când toate taburetele și scaunele sunt ocupate, numărul picioarelor din cameră este 39. Câte scaune sunt în cameră?
Concursul „ Micul Arhimede”, 2010, Craiova

4. Un dreptunghi și un pătrat au, fiecare, aria de 36 cm². Lățimea dreptunghiului este o treime din latura pătratului. Care este lungimea dreptunghiului?
Concursul „ Micul Arhimede”, 2010, Craiova

5. Șapte talhari își împart prada după ce au jefuit un prinț încântător. Ei primesc fiecare câte o monedă, pe rând. În momentul în care au 15 monede, nu mai sunt destule monede pentru a le împărți la fiecare. Ei dau acest rest complicei. Câte monede ar fi putut avea prințul?
Concursul „ Micul Arhimede”, 2010, Craiova

6. Un biciclist a parcurs în prima zi cu 10 km mai puțin decât o cincime din distanța totală, în a doua zi cu 15 km mai mult decât o sesisime din rest, în a treia zi cu 25 km mai mult decât un sfert din noul rest, în a patra zi cu 15 km mai puțin decât jumătate din distanța rămasă, iar în ultima zi ultimii 100 km. Distanța totală parcursă de biciclist este egală cu:
Concursul „ Cristian Calude”, Galati, 2010

7. Care este cel mai mic număr natural care împărțit la 6 dă restul 1, împărțit la 8 dă restul 3, iar împărțit la 9 dă restul 4?
Concursul „ Cristian Calude”, Galati, 2010

8. Suma a trei numere naturale a, b, c este 936. Dacă din primul număr se scade 258, din al doilea 121, iar din al treilea 479, numerele devin egale. Cu cât este egal rezultatul calculului $2 \cdot a + 3 \cdot b + c$?
Concursul „ Cristian Calude”, Galati, 2010

9. Fie mulțimile : $A = \{ \overline{abc} \in N \mid \overline{abc} = 8n + 2, n \in N \}$ și $B = \{ \overline{def} \in N \mid \overline{def} = 6m + 1, m \in N \}$. Determinați cardinalul mulțimii $A \cap B$.
Daniela Bucur, Concursul „ Grigore Moisil”, Ploiesti, 2011

10. Se dau numerele: $a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2011}$ și $b = 1 + 6 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{2011}$
Aflați restul împărțirii numărului $A = 5^{2011} \cdot (a + 5b + 2)$ la 10^{2012} .
Daniela Bucur, Concursul „ Grigore Moisil”, Ploiesti, 2011

³⁾ **Se primesc soluții pana la 10 noiembrie 2011**

AxiomA supliment mAtemAtic-nr.40

CLASA:a VI-a

- Prin împărțirea unui număr natural d la 5 se obține câtul a și restul 3, iar prin împărțirea lui d la 7 se obține câtul b și restul 5, unde $a, b \in \mathbf{N}$.
 - Poate fi d egal cu 2013 ? Justificați!
 - Aflați restul împărțirii lui d la 35.
 - Arătați că $b = M_5 + 4$.
 - Demonstrați că $a + b \neq 2012$.

Marius Mazilu, Rm. Vâlcea, Concursul „ Scoala cu ceas-2011”
- Grupând bomboanele dintr-o cutie câte 5, câte 6 și câte 7, de fiecare dată rămân 4 bomboane. Dacă se grupează câte 8 nu mai rămân în cutie bomboane. Câte bomboane sunt în cutie, știind că aceasta nu poate conține mai mult de 450 de bucăți?

Liviu Ardelean, Olimpiada de matematică, fața locală, Sibiu, 2005
- S-au utilizat 3kg de vopsea pentru a picta uniform fețele unui cub. S-a realizat apoi un al doilea cub având muchiile de trei ori mai mari decât primul. Câte kilograme de vopsea vor fi necesare pentru a-l vopsi în întregime?

Concursul „ Micul Arhimede”, 2010, Craiova
- Într-o urnă sunt bile roșii, galbene și albastre. 918 bile nu sunt roșii și 418 bile nu sunt albastre. Împărțind numărul bilelor albastre la numărul bilelor galbene se obține câtul 4 și restul 53. Aflați câte bile roșii, galbene și albastre sunt în urnă.

Concursul „ Micul Arhimede”, 2010, Craiova
- Să se determine toate numerele naturale nenule, care, împărțite la 17, dau câtul egal cu restul și, împărțite la 23, dau, de asemenea, câtul egal cu restul.

Concursul „ Eremia Georgescu”, Buzău, 2010
- Fie $A = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020}$.
 - Arătați că A se divide cu 10.
 - Aflați ultimele două cifre ale lui A .

Concursul „ Eremia Georgescu”, Buzău, 2010
- Câte numere naturale de trei cifre au proprietatea că împărțite la numărul \overline{ab} dau restul 97?

Concursul „ Cristian Calude”, Galati, 2010
- Câte fracții au numărătorul și numitorul numere naturale de trei cifre și sunt echivalente cu fracția $\frac{17}{89}$?

Concursul „ Cristian Calude”, Galati, 2010
- Sa se calculeze numerele 26^2-24^2 , respectiv 51^2-49^2 . Se pot gasi doua numere (mai mari), consecutive, astfel incat diferenta patratelor lor sa fie egala cu 100, respectiv 200?

Conf.dr. Andrei Vernescu , Concursul,, Danubius 2011”, Corabia
- Fie numărul \overline{abcdef} . Sa se arate ca $137 \mid \overline{abcdef}$ daca si numai daca $137 \mid \overline{cdef} - \overline{ab}$

Daniel Cojocaru, Concursul,, Danubius 2011”, Corabia

AxiomA supliment mAtematic-nr.40

CLASA: a VII-a

1. Triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu $m(\angle ABC) = 90^\circ$, iar triunghiul BCD este dreptunghic isoscel cu $m(\angle BCD) = 90^\circ$.
 - a) Stabiliți dacă [BD este bisectoarea unghiului ABC.
 - b) Fie $P \in (BC)$, $Q \in (CD)$. Dacă $AP \perp BQ$, demonstrați că $AQ \perp DP$.
Dumitru Dobre și Ștefan Smărăndoiu – Rm. Vâlcea, Concursul „Școala cu ceas-2011”
2. Fie numărul $n = 4^{2011}$.
 - a) Determinați restul împărțirii numărului n la 3;
 - b) Demonstrați că n are cel puțin 1207 cifre;
 - c) Eliminăm câteva cifre de la începutul numărului n , pe care le adunăm la numărul rămas. Continuăm procedeul până obținem un număr de zece cifre. Demonstrați că acest număr are cel puțin două cifre egale.
Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea, Concursul „Școala cu ceas-2011”
3. Se consideră dreptunghiul ABCD cu $AD < AB$ și punctul E simetricul lui A față de dreapta BD.
 - a) Să se arate că patrulaterul DBCE este trapez isoscel;
 - b) Știind că $BD = 4$ cm și $DE = CE$, să se arate că, oricum am alege 13 puncte aflate pe suprafața trapezului, există două cu distanța între ele mai mică sau egală cu 1 cm.
Maricel Manea, Concursul „Cristian Calude -2010”, Galați
4. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\angle B) = 18^\circ$ iar $m(\angle C) = 54^\circ$ și AM, $M \in (BC)$ bisectoarea unghiului A. Perpendiculara din M pe AB intersectază dreapta AC în N. Să se demonstreze că $[NC] \equiv [BA] \equiv [BN]$.
E. Blăjuț, Bacău
5. Fie D mijlocul laturii BC a triunghiului ABC în care $m(\angle B) = 30^\circ$ iar $m(\angle C) = 105^\circ$. Să se determine măsura unghiului DAC.
E. Blăjuț, Bacău
6. Fie AD bisectoarea unghiului BAC din triunghiul ABC, în care $(\angle A) = 60^\circ$. Pe laturile AB și AC se consideră punctele E, respectiv F astfel încât $m(\angle BDE) = m(\angle CDF) = 60^\circ$. Să se demonstreze că $[BE] \equiv [EF] \equiv [FC]$.
E. Blăjuț, Bacău
7. Comparati numerele:
 $a = 1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2010 \cdot 2011^2$ și
 $b = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2011 \cdot 2012 - 1$
Nicolae Tomescu, Concursul „Danubius 2011”, Corabia
8. Să se arate că oricum am alege 252 de numere naturale se afla printre ele două a căror sumă sau diferență se divide cu 100.
Nicolae Ivășchescu, Craiova
9. Determinați numerele naturale nenule x, y, z știind că: $\frac{x^3}{x+26} = \frac{y}{y+25} = \frac{z^2}{z+12}$.
Gheorghe Achim O.J.M. 2002

CLASA: a VIII-a

1. a) Determinați $n \in \mathbf{N}$, astfel încât $\sqrt{n^2 - 2011}$ să fie număr natural.
 b) Demonstrați că există o infinitate de numere $a \in \mathbf{Q}$ astfel încât

$$\sqrt{ka + 2010} \in \mathbf{Q} \text{ și } \sqrt{ka + 2011} \in \mathbf{Q}, \text{ unde } k \in \mathbf{Q}^*.$$

Constantin Bărăscu, Concursul „Scoala cu ceas”, Rm. Vâlcea

2. Fie triunghiul ABC cu $2m(\angle BCA) = m(\angle CBA)$. Pe mediatoarea segmentului $[BC]$ se consideră punctele P și Q astfel încât $\angle CAP \equiv \angle PAQ \equiv \angle QAB$.
 Fie $PQ \cap AC = \{D\}$.
 a) Arătați că $AQ \cdot DP = AD \cdot PQ$.
 b) Demonstrați că $QP = QB$.
 c) Arătați că $m(\angle ACB) \neq 15^\circ$.

Cheian Dinis, Concursul „Scoala cu ceas-2011”, Chișinău

3. a) Demonstrați că $\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}$, $(\forall)k \in \mathbf{N}^*$.
 b) Să se arate că $2\sqrt{2012} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2011}} < 2\sqrt{2011}$

Ion Preda, Concursul „Scoala cu ceas-2011” Rm. Vâlcea

4. La o conferință au participat 100 de specialiști – chimiști și alchimiști.
 Fiecăruia dintre ei i-a fost adresată întrebarea:
"Dacă nu luăm în considerare persoana dumneavoastră, printre participanții rămași sunt mai mulți chimiști sau mulți alchimiști?". Au fost interogați 51 de participanți. Fiecare dintre ei a răspuns că sunt mai mulți alchimiști. Știind că alchimiștii întotdeauna mint, iar chimiștii spun întotdeauna adevărul, care e numărul de chimiști printre participanți?

Marcel Telescă, Chișinău, Concursul „Scoala cu ceas-2011”

5. D și E sunt mijloacele laturilor BC , respectiv AC ale triunghiului dreptunghic ABC ($m(\angle A) = 90^\circ$). Știind că $2 \cdot AD^2 + 4 \cdot BE^2 = 9 \cdot AB^2$, să se determine măsurile unghiurilor B și C ale triunghiului ABC .

E. Blăjuț, Bacău

6. Fie $ABCD$ un pătrat, O intersecția diagonalelor și P mijlocul segmentului DO iar $N \in (OC)$ astfel încât $CN = 3 \cdot NO$. Dacă $\{M\} = PN \cap BC$, arătați că $[PA] \equiv [PM]$.

E. Blăjuț, Bacău

7. Să se calculeze numărul:

$$a = \sqrt{\underbrace{111\dots11}_{2010} \underbrace{11333\dots333}_{2010} + \underbrace{888\dots888}_{2010} \underbrace{444\dots444}_{2010} - \underbrace{1777\dots7776}_{2009}}$$

E. Blăjuț, Bacău

8. Aratați ca există o infinitate de numere naturale n care nu contin cifra 0 astfel încât suma cifrelor numărului n să fie egală cu suma cifrelor numărului n^2 .

Lucian Tutescu, Concursul „Danubius 2011”, Corabia

9. Numerele reale x, y, z verifică simultan relațiile: $x^2 - yz = y - x - 1$; $y^2 + xz = z - y$; $z^2 + xy = x - z + 1$. Valoarea expresiei $E = 2011y + 2010x - 2011z$ este...

Concursul „Grigore Moisil”, 2011, Ploiesti

