CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

CLASA a IX-a

1. Un elev doreşte să cumpere 33 ciocolate, dintr-un magazin unde acestea sunt ambalate în cutii de câte 6, 9 şi respectiv 20 bucăți, fără ca acestea să poată fi vândute la bucată.
a) În câte moduri poate elevul să realizeze acest lucru?
b) În aceleaşi condiții, poate elevul să cumpere 43 ciocolate?

2. Numerele reale pozitive $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$, sunt, în această ordine, în progresie aritmetică de rație $r > 0$ şi pentru care $r \cdot a_1 = 18$. Determinați termenii progresiei astfel încât suma termenilor acesteia să fie minimă?

3. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ şi sistemul de ecuații: $\begin{cases} x - 2y = a \\ y - 2z = b \\ z - 2x = c \end{cases}$

Să se arate că pentru orice soluție (x, y, z) a sistemului avem $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

4. Considerăm triunghiul ABC, având laturile $AB = c$ şi $AC = b$. În planul acestuia se consideră punctele *M, N, D* astfel încât: $\overrightarrow{AM} = b \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = c \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} = b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}$.
Demonstrați că :
a) $(AM) \equiv (AN)$;
b) Patrulaterul *AMDN* este paralelogram;
c) (*AD* este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

CLASA a X-a

1. Avem dispoziție un număr nelimitat de jetoane pe care sunt scrise numerele 5, 7 sau 11. Un număr $n \in \mathbb{N}^*$ se numeşte **norocos** dacă găsim un număr de jetoane astfel încât suma numerelor scrise pe ele să fie egală cu n.
a) Demonstrați că numărul 13 nu este **norocos**.
b) Arătați că numerele:14, 15, 16, 17 şi 18 sunt **norocoase**.
c) Demonstrați că orice număr natural $n \geq 14$ este **norocos**.

2. Fie $a,b,c,A \in (0,\infty) \setminus \{1\}$ şi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ astfel încât : $(ab)^\alpha = (bc)^\beta = (ac)^\gamma = A^2$.
Demonstrați că :

$$\frac{1}{\log_a A} + \frac{1}{\log_b A} + \frac{1}{\log_c A} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}.$$

3. Se dă funcția $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \log_{\sqrt{3}-1}\left(7 - 2\sqrt{x} - x\right)$.
a) Arătați că domeniul de definiție este $D = \left[0, 9 - 4\sqrt{2}\right)$.
b) Găsiți punctele de coordonate întregi situate pe graficul funcției *f*.

4. a) Demonstrați că:

$$\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x} \leq 2, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x} = 2^x + 2^{-x}.$$

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

CLASA a XI-a

1. O matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ verifică condițiile: $\det(A-3I_2)=4$ şi $\det(A+2I_2)=9$, I_2 fiind matricea unitate de ordinul al doilea.
Demonstrați că : $A^2 = 2A - I_2$.

2. Un determinant de ordin $n \geq 2$ are $(n^2 - n + 2)$ elemente egale. Demonstrați că determinantul este nul.

3. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}} - 2}$.
a) Determinați limitele laterale ale funcției f în punctele $x_0 = 0$ şi $x_1 = 1$.
b) Calculați : $l_1 = \lim\limits_{x\to\infty} e^x \cdot \left[e^{-x}\right]$ şi $l_2 = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} \cdot \left[e^x\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *a*, iar *e* este baza logaritmului natural.

4. Arătați că nu există polinoame *P, Q*, cu coeficienți reali,
$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$ şi $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$, $b_0 \neq 0$ şi $m, n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât: $P(x) = x\sqrt{x^2+1} \cdot Q(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

1. Pe mulțimea $G=(-1,\infty)$, se definește legea de compoziție internă dată prin $x*y=x+y+xy,\ \forall x,y\in G$.

a) Demonstrați că $(G,*)$ este grup abelian.

b) Rezolvați, în G, ecuația $\underbrace{x*x*x*...*x}_{n\ ori}=1,\ n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 2$.

c) Arătați că mulțimea $H=\left\{a^2-1/a\in\mathbb{Q}^*\right\}$ este subgrup al grupului $(G,*)$.

2. a) Folosind substituția $t=\dfrac{1}{u}$, să se demonstreze că $\displaystyle\int_x^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2},\ \forall x>0$.

b) Arătați că: $arctg\ x+arctg\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2},\ \forall x>0$.

c) Calculați: $I(a)=\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{arctg\ x}{x}dx,\ a>1$.

3. Calculați: a) $I=\displaystyle\int_0^2\frac{4x^3-6x^2+8x-3}{\left(x^2-x+1\right)^3}dx$.

b) $I(x)=\displaystyle\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$, unde e este baza logaritmului natural , iar $x\in(0,\infty)$.

4. Un elev colorează puncte de coordonate întregi ale planului, raportat la reperul ortogonal (xOy). Fiind colorate două puncte A şi B, elevul poate colora simetricul lui A față de B şi simetricul lui B față de A. Arătați că dacă inițial, în plan, erau colorate punctele $O(0,0)$; $A(1,0)$; $B(1,1)$; şi $C(0,1)$, atunci elevul poate colora toate pnctele de coordonate întregi ale planului.

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7