PROBLEME PROPUSE PENTRU LICEU [4)]

Clasa a IX-a

1. Fie a,b>0.

a. Să se demonstreze că $A=(x+y)\left(\frac{1}{ax+by}+\frac{1}{bx+ay}\right)\geq\frac{4}{a+b}$ pentru orice x>0,y>0.

b. În ce condiţii avem $A=\frac{4}{a+b}$?

Cătălin Năchila, Ploieşti

2. a. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia $x^4+x^2+2=y^2$.

b. Să se demonstreze ca ecuaţia $x^2+y^3+z^4+t^5=v^8$ are o infinitate de soluţii in $(N^*)^5$.

Petre Năchila, Ploieşti

3. Fie n∈N*. Să se rezolve inecuaţia:

$$|x-1|+|x-2|+...+|x-2n|\leq n^2$$

Petre Năchila, Ploieşti

4. Să se demonstreze că pentru orice x,y∈R, avem

$$\sqrt{x^2+y^2-4y+4}+\sqrt{x^2+y^2+2x+2y+2}\geq 2\sqrt{10}$$

Cătălina Isofache, Ploieşti

5. Se stie că pentru orice punct P din interiorul triunghiului ABC, segmentele (PA), (PB), (PC) reprezintă laturile unui triunghi. Să se precizeze natura triunghiului ABC.

Corneliu Voicilas, Ploieşti

6. Fie n,p∈N* si $A_n(p)=\sum_{k=1}^{np+p-1}\left[\frac{k}{p}\right], B_n(p)=\sum_{k=1}^{np+p-1}\left\{\frac{k}{p}\right\}$.

a. Să se demonstreze ca $A_5(3)=B_{14}(7)$.

b. Să se determine n si p dacă $A_n(p)=17\cdot B_n(p)$.

Claudiu Militaru, Ploieşti

7. Fie x,y,z>0 astfel încât x·y·z=1 si x+y+z=3. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{x^4(y+z)}+\frac{1}{y^4(x+z)}+\frac{1}{z^4(x+y)}\geq\frac{3}{2}.$$

Cătălin Năchila, Ploieşti

8. Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi nenule ecuaţia :

$$5x\sqrt{17+12\sqrt{2}}+3y\sqrt{17-12\sqrt{2}}+4z=45-2\sqrt{2}.$$

Felicia Ozunu, Vulcan, Hunedoara

[4)] *Se primesc soluţii până la 15 noiembrie 2009*

Clasa a X-a

1. Să se rezolve ecuația $\left\{\frac{(n+1)\sin x-1}{n}\right\}=\left\{\frac{n\sin x+1}{n+1}\right\}$, unde n$\in N, n\geq 2$. Prin {a} s-a notat partea fracționară a numărului real a.

Cătălin Năchila, Ploiești

2. Se consideră ecuația $x^{\log_n(n+1)}-(n+2)\log_n x+n^{\log_n x}-2=0$, unde $n\geq 2$.

a. Să se determine numarul maxim de solutii reale ale ecuației.
b. Dați un exemplu de ecuație de tipul considerat care sa aibă doua soluții reale.

Petre Năchila, Ploiești

3. Fie numerele complexe nenule z=r(cosα+isinα), $\alpha\in[0,2\pi)$. Fie punctele A(z), B($\bar{z}$), C$\left(\frac{z^2}{\bar{z}}\right)$ în reperul ortonormal xOy.

a. Considerând punctul A fixat, să se construiasca punctele B si C.
b. Să se determine unghiul făcut de vectorii $\overrightarrow{CB}$ si $\overrightarrow{CA}$.
c. Să se determine multimea punctelor A pentru care triunghiul ABC este echilateral.

Prelucrare, Cătălin Năchila, Ploiești

4. Fie n$\in N, n\geq 2$ si fie ecuația $\left(1+i\bar{z}\right)^n-\left(1-i\bar{z}\right)^n=0 \quad (1)$, unde z$\in$C.

a)Să se demonstreze că pentru orice z$\in$C soluție a ecuației (1) avem $\left|1+i\bar{z}\right|=\left|1-i\bar{z}\right|$.

b)Să se rezolve ecuația (1).

Prelucrare, Petre Năchila, Ploiești

5. Să se determine x>1, y>1 dacă $\lg\frac{1000}{xy}\cdot\lg x\cdot\lg y=1$.

Claudiu Militaru, Ploiești

6. Fie m,n$\in$N*, m>n, p,q$\in$R. Fie ecuația $z^m+p\cdot z^n+q=0$.

a)Să se demonstreze că dacă m=2n, p+q=-1 si q>0, atunci ecuația are doua sau patru rădacini reale.

b)Să se demonstreze ca dacă p+q=-2, p>0, atunci toate rădacinile ecuației au modulul mai mare ca 1.

Claudiu Militaru, Ploiești

7. Pentru orice punct P din interiorul unui tetraedru notăm cu s(P) suma distanțelor de la P la fețele tetraedrului. Dacă în interiorul tetraedrului există punctele distincte P_i, i=$\overline{1,4}$ astfel încât $s(P_1)=s(P_2)=s(P_3)=s(P_4)$, să se demonstreze ca fețele tetraedrului au aceeași arie.

Corneliu Voicilas, Ploiești

Clasa a XI-a

1. Fie $n\in N, n\geq 2$ şi fie funcţia $f_n:[0,\infty)\to R$ definită prin $f_n(0)=0$ si $f_n(x)=2x^n\ln x-x^n$, $x>0$.

a. Să se studieze derivabilitatea funcţiei f_n.

b. Fie $x_n>0$ soluţia ecuaţiei $f'_n(x)=0$. Să se demonstreze că şirul (x_n) este convergent şi să se determine limita şirului.

c. Să se demonstreze ca $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)=-\infty$.

Prelucrare, Petre Năchilă

2. Demonstraşi că pentru orice $n\in N^*$ exist matricele $A,B,C\in M_2(Z)$ astfel încât $AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2n+1 & 1\end{pmatrix}$ si $C^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2n+1 & 1\end{pmatrix}$.

Petre Năchila, Ploieşti

3. Fie $m\in N^*$ fixat si fie $a\in[0,1]$. Să se studieze convergenţa şirului (x_n) definit prin $x_0=a$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n^m-x_n^{m+1}}, \forall n\in N^*$.

Cătălin Năchila, Ploieşti

4. Fie sirul având termenul general $x_n=\sqrt{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n}....\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}, n\in N, n\geq 2$.

a)Să se demonstreze că $x_n<\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}, \forall n\geq 2$.

b)Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{2n}\cdot x_n\right)$.

Cătălina Isofache, Ploieşti

5. Fie matricea $A\in M_2(C)$ şi mulţimea $H=\{A^n | n\in N^*\}$. Să se demonstreze că H este mulţime finită dacă şi numai dacă $A^2=O_2$ sau există $p\in N, p\geq 2$, astfel încât $A^p=A$.

Cezar Apostolescu, Ploieşti

6. Fie $A\in M_3(C)$.

a)Să se demonstreze că $T_r(A^2)=(T_rA)^2-2T_rA^*$.

b)Dacă $A^3=I_3$, să se demonstreze că $(T_rA)^2=3T_rA^*$.

Cezar Apostolescu, Ploieşti

7. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+3)...(3n-1)}{(n+2)(n+4)...(3n)}$.

Cezar Apostolescu, Ploieşti

Clasa a XII-a

1. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_{-\pi}^{\pi}\left|a\cos t+b\sin t\right|^n dt},\ a,b\in R$.

Corneliu Voicilas, Ploieşti

2. Fie $f:[1,\infty)\to R$ o funcţie descrescătoare pentru care există $f(x)=0$ şi fie $F:[1,\infty)\to R$ o primitiva a lui f astfel încât F(1)=0.

a. Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\geq 1},\ a_n=f(1)+f(2)+...+f(n)-F(n)$ este convergent având limita în intervalul [0,f(1)).

b. Să se studieze cazul particular $f(x)=\frac{1}{x}$.

Cezar Apostolescu, Ploieşti

3. Să se demonstreze că:

a) Nu există $f:R\to R$ care sa admită o primitiva $F:R\to R$ astfel încât xf(x)=e^x-F(x), x∈R si F(1)=1.

b) Există o infinitate de functii $f:R^*\to R$ care admit o primitivă $F:R^*\to R$ astfel încât xf(x)= e^x -F(x), x∈R* si F(1)=1.

Cezar Apostolescu, Ploieşti

4. Să se determine funcţiile $f:R\to R$ care admit primitive şi f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy, x,y∈R.

Cătălin Năchilă, Petre Năchilă, Ploieşti

5. Să se determine primitivele funcţiilor:

a. $f:(0,\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^5-x^5-32}$;

b. $f_n:R\to R,\ f_n(x)=\dfrac{2x^3-3x^2+7x-3}{(x^2-x+1)^n},n\in N^*$.

(***)

6. Fie $M=\left\{A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\middle| a,b,c,d\in Z,|ad|+|bc|=2,|ab|+|cd|=0\right\}$.

a.Să se determine numarul elementelor mulţimii M.

b.Să se precizeze dacă (M,·) este grup.

c.Determinaţi doua mulţimi G⊂M astfel încât (G, ·) să fie grup.

Cătalin si Petre Năchila, Ploieşti