# PROBLEME PROPUSE PENTRU LICEU[3)]

## Clasa a IX-a

**1.** a) Să se determine numerele $x$ şi $y$, ştiind că are loc egalitatea

$$\frac{2x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\left(y^2+1+\frac{1}{y^2+1}\right).$$

b) Se pot determina numerele $x$ şi $y$ din egalitatea $\frac{2xy}{1+x^2y^2}=\frac{1}{2}\left(y^2+1+\frac{1}{y^2+1}\right)$ ?

*conf. univ. dr. Andrei Vernescu*

**2.** Fie $n\geq 2$ şi $0<a_1<a_2<...<a_n<1$, $0<b_1<b_2<...<b_n<1$. Demonstraţi că dacă există $x\in(0,1)$ astfel încât

$$0<[x+a_1]+[x+a_2]+...+[x+a_n]=[x+b_1]+[x+b_2]+...+[x+b_n]<n$$

dacă şi numai dacă există $i\in\{1,2,...,n-1\}$ astfel ca $\max\{a_i,b_i\}<\min\{a_{i+1},b_{i+1}\}$.

*conf. univ. dr. Cristinel Mortici*

**3.** Fie $\Delta ABC$ şi $\Delta DEF$ două triunghiuri cu proprietatea că au acelaşi ortocentru. Dacă $O_1$ şi $O_2$ sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, respectiv DEF, să se arate că:

a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{O_1O_2}$ ;b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}$.

*. Lucian Tuţescu, Craiova, Ion Nedelcu, Ploieşti*

**4.** *Dacă* $a$, $b$ sunt numere reale fixate , să se demonstreze că cel puţin una dintre ecuaţiile : $ax^2+2bx+1=0$, $x^2+2ax+b=0$, $ax^2+2x+b=0$ are rădăcini reale .

*dr. Dorin Mărghidanu , Corabia*

**5.** Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{3x-1}{4}\right]+\left[\frac{9x+1}{12}\right]=5x+2-\left[\frac{9x+5}{12}\right]$ , unde $[a]$, reprezintă partea întreagă a numărului a.

*Mariana Mitea, Cugir*

**6.** Se dau numerele reale $a,b,c\in(0,\infty)$ sau $a,b,c\in(-\infty,0)$. Să se demonstreze că cel puţin una dintre ecuaţiile:

$ax^2+bx+c=0$ , $bx^2+cx+a=0$ , $cx^2+ax+b=0$ nu are soluţii reale.

*Marian Teler, Profesor Costeşti, judeţul Argeş*

**7.** Să se rezolve ecuaţia: $\frac{x+y}{2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+3=\sqrt{3x-2}+\sqrt{3y-2}$.

*Mariana Mitea, Cugir*

**9.** Dacă $a\in Z$ arătaţi că ecuaţia:

$3x^5+2ax^4-(2a+1)x^3+(2a+3)x^3+3x+2a+5=0,$ nu admite rădăcini întregi.

*Cezar Ozunu, Daneţi, Dolj*

[3)] **Se primesc soluţii până la 25 octombrie 2011**

*** Problemele 1-4 au fost propuse la Concursul ,, Danubius'',2011**

## Clasa a X-a

**1.** a) Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=x+\log_2 x$. Să se demonstreze că funcția $f$ este bijectivă.

b) Să se rezolve ecuațiile $f(x)=1,\ f(x)=3,\ f(x)=6,\ f(x)=11$. Se consideră apoi numerele 1, 3, 6, 11, ..., definite după regula dată de egalitățile precedente. Care este numărul următor în această succesiune?

*conf. univ. dr. Andrei Vernescu*

**2.** Fie $z_1,\ z_2,\ z_3$ numere complexe ce satisfac relațiile :

$$1+z_1 z_2 z_3=0\ , \qquad (1)$$

$$z_1+z_2+z_3=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\ . \qquad (2)$$

Să se demonstreze că produsul a două numere din $\{z_1, z_2, z_3\}$ este egal cu unitatea .

*prof. dr.* Dorin Mărghidanu , Corabia

**3.** Fie $z\in\mathbf{C}$ cu proprietatea că $(\exists)\ m,n\in\mathbf{N}^*$ prime între ele astfel încât $z^m$ şi $z^n$ sunt numere reale. Să se arate că $z\in\mathbf{R}$.

*prof. Lucian Tuțescu, Craiova*

**4.** Să determine toate functiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ , pentru care avem ,

$$f(x+y)=a^y f(x)+b^x f(y)$$ , oricare ar fi $x, y$ numere reale , iar $a, b$ nur

reale date , pozitive şi distincte . .

*Dorin Mărghidanu, Corabia*

**5.** Fie numarul : a=$\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$

a) demonstrati ca $a\in N$

b) pentru a = 4 rezolvati ecuatia $[a+x]+\log_3[a+x]+3^{[a+x]}=31$.

(prin [x] s-a notat partea intreaga a numarului real x)

*Radu Nicolae, Ploieşti*

**7.** Sa se rezolve in R ecuatia:

$$\sqrt{x^2+1}+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{2k}{x^2+1}\right)^2=3$$

*Mihai Ozunu, Daneți,Dolj*

**8.** Fie z$\in C^*-\{0,1\}, n\in N^*$

a) Sa se determine z stiind ca $z^n, z^{n+1}, z^{n+2}$ sunt afixele varfurilor unui triunghi dreptunghic.

b) Sa se reprezinte geometric imaginile punctelor obtinute.

*Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploieşti*

* **Problemele 1-4 au fost propuse la Concursul „ Danubius”,2011**

## Clasa a XI-a

**1.** Să se arate că ecuaţia $2^x = x^2$ are exact trei rădăcini reale, dintre care una este iraţională.

*conf. univ. dr.* Andrei Vernescu

**2.** Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă. Demonstraţi că pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, cu $a < b$, există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \frac{f'(c) - f'(a)}{c-a}.$$

*conf. univ. dr.* Cristinel Mortici

**3.** Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ şi funcţia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, de două ori derivabilă pe $(a, b) / \{x_0\}$, $x_0 \in (a, b)$, cu proprietăţile :

*i)* $f$ este convex - descrescătoare pe $(a, x_0)$;

*ii)* $f$ este concav - crescătoare pe $(x_0, b)$.

Să se demonstreze că $f$ nu este derivabilă în $x_0$.

*dr. Dorin Mărghidanu*, Corabia

**4.** Se dă matricea $A \in M_3(R)$ cu următoarele proprietăţi:

i) Elementele de pe coloana principală sunt egale,

ii) Sumele elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană sunt egale cu 2008.

Să se demonstreze că $\det(A) \geq 0$. În ce situatie are loc egalitatea ?

*Marian Teler, Costeşti*

**5.** Determinaţi matricele $A, B \in M_2(N)$ astfel încât $AB = I_2$

*Marian Teler, Costeşti*

**6.**

**a.** Calculaţi: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an+1}{2n+3}\right)^{2007n}$, (Discuţie după $a \in (0, \infty)$)

**b.** Fie $a_n = \sum_{k=1}^{n} \log_{\frac{1}{3}} \left[\frac{k^2 + 2k}{(k+1)^2}\right]$, Calculaţi: $\lim_{n\to\infty} a_n$

*Boncescu Florin Cristian, Ciuleanu Ionela, Studenţi Bucureşti*

**7.** Fie matricile $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Să se demonstreze că pentru orice $n \in N^*$ eistă $a_n \in R$ astfel încat $A^n - B^n = a_n(A - B)$.

*Cătălin Năchilă, Ploieşti*

**8.** Fie matriucile inversabile A şi B $\in M_n(C), n \in N, n \geq 2$ astfel încat $AB + B^{-1}A^{-1} + I_n = O_n$. Să se demonstreze că matricea $A + B + A^{-1}B = O_n$.

Petre *Năchilă, Ploieşti*

***Problemele 1-3 au fost propuse la Concursul „ Danubius”,2011***

**Clasa a XII-a**

**1.** Rezolvați în $S_5$ ecuația:

$$x^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Prof. Liviu Smarandache, Craiova*

**2.** Fie $f : R \to R$ continuă care admite o primitivă F cu $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$ şi $g : R \to R$ cu proprietatea că $g(0) = F(0)$ şi

$$f\left(\frac{2x+y}{3}\right) \le \frac{g(y)-g(x)}{y-x} \le f\left(\frac{x+2y}{3}\right),\ \forall\, y > x$$

Demonstrați că $g$ este continuă şi orice primitivă a sa este crescătoare.

*conf. univ. dr. Cristinel Mortici*

**3.** Se consideră şirul de numere reale $(I_n)_{n\ge1}$, definit de egalitățile

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$$

a) Să se arate că

$$\text{(1)}\quad 1-\ln 2 < I_1 < \frac{1}{2};$$

$$\text{(2)}\quad 1-\frac{\pi}{4} < I_2 < \frac{1}{3}.$$

b) Să se demonstreze că şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent şi să i se determine limita

*conf. univ. dr.* Andrei Vernescu

**4.** Fie $A(m) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ şi $M = \{A(m) | m \in Z\}$

a) Să se demonstreze că $A(m)\cdot A(n) \in M, (\forall) m, n \in Z$

b) Să se demonstreze că $(M,\cdot)$ este grup comutativ

c) Să se demonstreze că grupul $(M,\cdot)$ este izomorf cu grupul $(Z,+)$

*Marian Teler, Profesor Costeşti, Judeţul Argeş*

**5.** Fie $f : R \to R$ o funcție cu proprietățile

a) $f(\sin x) \in Q, (\forall) x \in R$,

b) Există $a, b \in [-1,1]$ astfel încât $f(a) \ne f(b)$.

Să se demonstreze că funcția f nu admite primitive.

*Marian Teler, Costeşti*

* **Problemele 1-3 au fost propuse la Concursul „ Danubius",2011**