CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
“ PETRU MOROŞAN-TRIDENT ”
“ MEMORIALUL MIRCEA GANGA ”
Ediţia a VII-a , Secţiunea A (M_1),
Brăila, 6 - 8.11. 2009

Clasa a IX a

1. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în $A, BC = a, AC = b, AB = c.$ Înălţimea din A, bisectoarea interioară din B şi mediana din C sunt concurente dacă şi numai dacă $b^2 = ac.$

Prof. Gheoghe Alexe, Brăila

2. Dacă numerele reale strict pozitive a, b, c satisfac relaţia $a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c = 2$, demonstraţi că:

$$\frac{1}{c+ab} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{a+bc} \geq \frac{9}{2}.$$

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oţelu-Roşu,
Revista de Matematică de Brăila nr.4

3. Să se determine z şi $y \in \square$ ştiind că $[x] + [x + yz] = \left[\frac{x}{z}\right], (\forall) x \in \square$ unde $[x]$ este partea întreagă a numărului x.

Prof. Gabriel Daniilescu, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
“ PETRU MOROŞAN-TRIDENT ”
“ MEMORIALUL MIRCEA GANGA ”
Ediţia a VII-a , Secţiunea A (M_1),
Brăila, 6 - 8.11. 2009

Clasa a X a

1. Fie $ABCDE$ un pentagon şi M, N, P, Q punctele de intersecţie ale segmentelor ce unesc mijloacele laturilor opuse în patrulaterele $BCDE, CDEA, EABD, ABCE$ respectiv. Să se demonstreze că $MNPQ$ este paralelogram dacă şi numai dacă $ABCD$ este paralelogram .

Traian Tămâian, Carei
Gazeta Matematică nr.4/2009

2. Dacă $a,b,c>0$ astfel încât $ab+ac+bc=3$. Demonstraţi că

$$\frac{a^3(a+b)}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3(c+a)}{c^2+ac+a^2}\geq 2.$$

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

3. Să se determine funcţiile $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietăţile

$$f(x+y,z+t)=f(x,z)+f(y,t),(\forall)x,y,z,t\in\mathbb{R}$$
$$f^2(x,y)=f(x^2+y^2,2xy),(\forall)x,y\in\mathbb{R}.$$

Andrei Velicu,Constanţa
Gazeta Matematică nr.1/2009

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
“ PETRU MOROŞAN-TRIDENT ”
“ MEMORIALUL MIRCEA GANGA ”
Ediţia a VII-a , Secţiunea A ($\mathbf{M_1}$),
Brăila, 6 - 8.11. 2009

Clasa a XI a

1. Fie permutarea $\sigma \in S_n, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \; .... \; n \\ n & n-1 .....1 \end{pmatrix}$ unde $n = 4k+2, k \geq 1$. Să se arate că:

a) ecuaţia $x^{2a} = \sigma, x \in S_n, a \in \square^*$ nu are soluţii în S_n.

b) nu există permutările $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{2l+1} \in S_n, l \geq 1$ astfel încât $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_3 = ...\tau_{2l}\tau_{2l+1} = \tau_{2l+1}\tau_1 = \sigma$.

c) produsul tuturor permutărilor din S_n este o permutare pară, indiferent de ordinea permutărilor din produs.

Gheorghe Alexe, Brăila

2. Să se determine $A, B \in M_3(\square)$ care verifică egalitatea :

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 2009 & 0 \\ 0 & 0 & 2009 \\ 2009^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gabriel Daniilescu, Brăila

3. Fie şirurile de numere reale $(a_n)_n, (b_n)_n$. Să se arate că dacă:

$$a_n + b_n \geq 0 \text{ şi } a_n^3 + b_n^3 - 3a_nb_n \leq \frac{1-n}{n}, (\forall) n \geq 1$$

atunci şirurile sunt convergente şi să se afle limitele lor.

.

Dan Negulescu, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN-TRIDENT "
" MEMORIALUL MIRCEA GANGA "
Ediţia a VII-a , Secţiunea A (M_1),
Brăila, 6 - 8.11. 2009

Clasa a XII a

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup multiplicativ având elementul neutru e şi a un element al său astfel încât $axa^{-1}=x^3,(\forall)x\in G.$ Să se arate că $xax^{-1}=a^3,(\forall)x\in G.$

Dumitru şi Rodica Bălan, Galaţi

2. Să se determine primitivele funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{2^x+2^{-x}+2}$.

Dan Negulescu, Brăila

3. Pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ considerăm $M_f=\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,\varphi$ continuă şi $f\circ\varphi=f\}$.

a) Arătaţi că M_f este monoid cu operaţia de compunere a funcţiilor.

b) În cazul $f(x)=x^2-2x,(\forall)x\in\mathbb{R}$, demonstraţi că M_f are patru elemente.

c) În cazul $f(x)=\cos x,(\forall)x\in\mathbb{R}$, dacă $\varphi\in M_f$ demonstraţi că φ este derivabilă pe $\mathbb{R}-\{k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$.

Daţi exemplu de o funcţie $\varphi\in M_f$ care să nu fie derivabilă în nici un punct de forma $k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Radu Vasile, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.