

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
« PETRU MOROȘAN- TRIDENT »
“MEMORIALUL MIRCEA GANGA”
EDIȚIA a VII-a, SECȚIUNEA B (M_2), BRĂILA, 06-08.11.2009

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a IX-a

Problema 1:

Se consideră următoarele mulțimi de numere:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = a^2 + 3a + 20, a \in \mathbb{N}\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = b^2 + 3b - 16, b \in \mathbb{N}\}.$$

Să se determine $A \cap B$.

Soluție:

Fie x un element comun al mulțimilor A și B .

Rezultă că există cel puțin două numere naturale a și b pentru care are loc egalitatea:

$$a^2 + 3a + 20 = b^2 + 3b - 16 \Leftrightarrow (b - a)(a + b + 3) = 36 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Deoarece $a, b \in \mathbb{N}$, se vor rezolva următoarele sisteme de ecuații:

$$1) \begin{cases} a + b + 3 = 36 \\ b - a = 1 \end{cases}; 2) \begin{cases} a + b + 3 = 18 \\ b - a = 2 \end{cases}; 3) \begin{cases} a + b + 3 = 12 \\ b - a = 3 \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} a + b + 3 = 9 \\ b - a = 4 \end{cases}; 5) \begin{cases} a + b + 3 = 6 \\ b - a = 6 \end{cases} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Rezolvarea sistemelor.....2 p

Doar sistemele 1), 3), 4) admit soluții în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Soluțiile sistemelor sunt:

$$\begin{cases} a = 16 \\ b = 17 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 324; \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 38; \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 24 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

Deci, $A \cap B = \{24; 38; 324\} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
« PETRU MOROȘAN- TRIDENT »
“MEMORIALUL MIRCEA GANGA”
EDIȚIA a VII-a, SECȚIUNEA B (M_2), BRĂILA, 06-08.11.2009

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a IX-a

Problema 2:

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\left[\frac{x+1}{2} \right] = 2 \cdot \left\{ \frac{x+5}{2} \right\},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă, iar $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului a .

Soluție:

Aducerea ecuației la forma:

$$\left[\frac{x+1}{2} \right] = 2 \left(\frac{x+5}{2} - \left[\frac{x+5}{2} \right] \right) \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x+1}{2} \right] = x+5 - 2 \left[\frac{x+1}{2} + 2 \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x+1}{2} \right] = x+5 - 4 - 2 \left[\frac{x+1}{2} \right] \Leftrightarrow 3 \left[\frac{x+1}{2} \right] = x+1 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x+1}{2} \right] = \frac{x+1}{3} \Leftrightarrow \frac{x+1}{3} \leq \frac{x+1}{2} < \frac{x+1}{3} + 1$$

Rezolvarea inecuațiilor ($-1 \leq x < 5$) 1 p

Se notează $\frac{x+1}{3} = k, k \in \mathbb{Q}$, care înlocuit în relația $-1 \leq x < 5$, implică

$$k \in \{0, 1\}, \text{ de unde } x \in \{-1, 2\} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
« PETRU MOROȘAN– TRIDENT »
“MEMORIALUL MIRCEA GANGA”
EDIȚIA a VII-a, SECȚIUNEA B (M_2), BRĂILA, 06-08.11.2009

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a IX-a

Problema 3:

Dacă într-o progresie aritmetică de numere naturale există un pătrat perfect, să se arate că există o infinitate de pătrate perfecte.

Soluție:

Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, cu termenul general: $a_n = a_1 + (n-1)r, n \geq 2$ și pătratul perfect : $a_k = a^2, k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 2 p

Avem $a_n = a^2 + r(n-k)$2 p

Alegem n astfel încât $n-k = 2an + rm^2$ și avem $a_n = (a + rm)^2, n \in \mathbf{N}$ 3 p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
« PETRU MOROȘAN– TRIDENT »
“MEMORIALUL MIRCEA GANGA”
EDIȚIA a VII-a, SECȚIUNEA B (M_2), BRĂILA, 06-08.11.2009

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a X-a

Problema 1:

Fie numerele reale $a = \log_7 12$, $b = \log_{12} 24$ și $c = \log_{54} 168$.

- a) Calculați $\log_3 7$ în funcție de a și $x = \log_3 2$.
 b) Calculați c în funcție de a și b .

Soluție:

a) Fie $a = \frac{\log_3 12}{\log_3 7}$ 1 p

$\log_3 7 = \frac{2x+1}{a}$ 1 p

b) $b = \frac{3x+1}{2x+1}$ 1 p

$x = \frac{1-b}{2b-3}$ 1 p

$c = \frac{3x+1+\log_3 7}{3+x}$ 1 p

Efectuarea calculelor și aducerea lui c la forma : $c = \frac{ab+1}{a(8-5b)}$ 2 p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
« PETRU MOROȘAN– TRIDENT »
“MEMORIALUL MIRCEA GANGA”
EDIȚIA a VII-a, SECȚIUNEA B (M_2), BRĂILA, 06-08.11.2009

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a X-a

Problema 2:

Fie mulțimea $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 3b^2 = 1\}$.

- a) Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{Q}$, $z = a + 15\sqrt{3} \in A$.
 b) Să se arate că $\forall z_1, z_2 \in A \Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in A$
 c) Să se demonstreze că $\frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)}{z_1 z_2 z_3} \in \mathbb{Q}, \forall z_1, z_2, z_3 \in A$

Soluție:

- a) $a^2 - 3 \cdot 15^2 = 1$ de unde rezultă $a = \pm 26$ 1 p
 b) Se verifică prin calcul direct.....2 p
 c) Se notează $\bar{z} = a - b\sqrt{3}$ și se demonstrează că : $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} , z \cdot \bar{z} = 1 \text{ și } z \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow z = \bar{z}, \forall z \in A \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

Se notează $Z = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)}{z_1 z_2 z_3}$ și se demonstrează pe baza proprietăților de

mai sus că $Z = \bar{Z} \Leftrightarrow Z \in \mathbb{Q}$ 2 p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
« PETRU MOROȘAN- TRIDENT »
“MEMORIALUL MIRCEA GANGA”
EDIȚIA a VII-a, SECȚIUNEA B (M₂), BRĂILA, 06-08.11.2009

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a X-a

Problema 3:

Fie $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$.

Să se rezolve ecuația $f(\log_2 x) = 1$.

Soluție:

Prelucrarea lui $f(x)$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+3+|x-5|}{2}} - \sqrt{\frac{x+3-|x-5|}{2}} + \sqrt{\frac{x+8+|x-10|}{2}} - \sqrt{\frac{x+8-|x-10|}{2}} \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

Explicitarea modulelor 1 p

Aducerea lui $f(x)$ la forma:

$$f(x) = \begin{cases} 5 - 2\sqrt{x-1}, x \in [1, 5) \\ 1, x \in [5, 10] \\ 2\sqrt{x-1} - 5, x \in (10, +\infty) \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

Rezolvarea ecuației $f(\log_2 x) = 1$ și determinarea lui x : $x \in [32, 1024]$ 1 p.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
« PETRU MOROȘAN- TRIDENT »
“MEMORIALUL MIRCEA GANGA”
EDIȚIA a VII-a, SECȚIUNEA B (M_2), BRĂILA, 06-08.11.2009
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a XI-a

Problema 1

Se dau matricele $A, B, C \in M_2(R)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

- a) Determinați matricea $X = ABC$.
- b) Demonstrați că $X^2 = AB^2C$.
- c) Determinați matricea $X^n, n \in N^*$.

Soluție:

- a) Prin calcul direct se obține

$$X = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$

- b) $CA = I_2$

$$X^2 = (ABC)(ABC) = ABCABC = ABBC = AB^2C \dots\dots\dots 1p$$

- c) Se va demonstra prin metoda inducției matematice ca $X^n = AB^nC \dots\dots\dots 1p$

Calculăm mai întâi B^n cu Binomul lui Newton

$$B = 2I_2 + Y, \text{ unde } Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B^n = 2^n I_2 + C_n^1 2^{n-1} Y + \dots + C_n^n Y^n \dots\dots\dots 1p$$

și cum $Y^2 = O_2$ obținem

$$B^n = 2^n I_2 + C_n^1 2^{n-1} Y = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$

$$X^n = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 3n-8 & n \\ -9n & 8-3n \end{pmatrix}, n \in N^* \dots\dots\dots 1p$$

$$P(n): X^n = AB^nC$$

Eta de verificare : $n=1 \Rightarrow X = ABC$ adevărată din a)

Eta de demonstrație $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$P(n+1): X^{n+1} = AB^{n+1}C$$

$$X^{n+1} = (AB^nC)(ABC) = AB^nCABC = AB^{n+1}C \dots\dots\dots 1p$$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
« PETRU MOROȘAN- TRIDENT »
“MEMORIALUL MIRCEA GANGA”
EDIȚIA a VII-a, SECȚIUNEA B (M_2), BRĂILA, 06-08.11.2009

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a XI-a

Problema 2

Fie matricea $A \in M_2(Q)$ cu proprietatea că $\det(A^2 - 2I_2) = 0$. Să se demonstreze că $A^2 = 2I_2$ și $\det A = -2$.

Soluție:

$$\det(A^2 - 2I_2) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \sqrt{2}I_2) \det(A + \sqrt{2}I_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\det(A - \sqrt{2}I_2) = 0 \text{ sau } \det(A + \sqrt{2}I_2) = 0 \dots\dots\dots 1p$$

Cazul I: $\det(A - \sqrt{2}I_2) = 0$

$$\det(A - \sqrt{2}I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a - \sqrt{2} & b \\ c & d - \sqrt{2} \end{vmatrix} = (ad - bc + 2) - (a + d)\sqrt{2} = 0 \dots\dots\dots 2p$$

și cum $ad - bc + 2 \in Q$, $a + d \in Q$ rezultă

$$\begin{cases} ad - bc + 2 = 0 \\ a + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \det A = -2 \\ a + d = \text{Tr}A = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$

Cazul II: $\det(A + \sqrt{2}I_2) = 0$

se tratează analog.....1p

Se calculează apoi A^2 și folosind proprietățile demonstrate mai sus se deduce și că $A^2 = 2I_2$1p.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
« PETRU MOROȘAN- TRIDENT »
“MEMORIALUL MIRCEA GANGA”
EDIȚIA a VII-a, SECȚIUNEA B (M_2), BRĂILA, 06-08.11.2009

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a XI-a

Problema 3

Să se determine parametrii reali $a, b, c \in R$ astfel încât să fie îndeplinită egalitatea

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 2x^3} - ax^2 - bx - c) = 0.$$

Soluție:

Dacă $a \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 2x^3} - ax^2 - bx - c) = \pm\infty$ ceea ce nu convine de unde rezultă $a > 0$ 1p

În aceste condiții cazul de nedeterminare este $(\infty - \infty)$ și se forțează factor comun x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 2x^3} - ax^2 - bx - c) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - x - \frac{b}{x} - \frac{c}{x^2} \right) = \infty(1-a)$$

Dacă $a \neq 1 \Rightarrow$ limita este $\pm\infty$, deci nu convine, rezultă $a = 1$ 2p

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 2x^3} - x^2 - bx - c) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(1-b)x^3 - (2c + b^2)x^2 - 2bcx - c^2}{\sqrt{x^4 + 2x^3} + x^2 + bx + c} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left[2(b-1) - \frac{2c + b^2}{x} - \frac{2bc}{x^2} - \frac{c^2}{x^3} \right]}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} = \infty(1-b) \end{aligned}$$

Dacă $b \neq 1$, limita este $\pm\infty$, deci nu convine, rezultă $b = 1$ 2p

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 2x^3} - x^2 - x - c) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-(2c+1)x^2 - 2cx - c^2}{\sqrt{x^4 + 2x^3} + x^2 + x + c} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-(2c+1) - \frac{2c}{x} - \frac{c^2}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1 + \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}} = \\ &= -\frac{2c+1}{2} = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
« PETRU MOROȘAN- TRIDENT »
“MEMORIALUL MIRCEA GANGA”
EDIȚIA a VII-a, SECȚIUNEA B (M_2), BRĂILA, 06-08.11.2009
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a XII-a

Problema 1

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \in M_2(R)$ și mulțimea $G = \{X(m) = I_2 + mA \mid m \in R\}$.

- a) Să se verifice dacă $I_2 \in G$.
- b) Să se arate că $X(m) \cdot X(n) = X(m+n+mn(a+1))$, $\forall X(m), X(n) \in G$.
- c) Să se determine ce condiție trebuie să îndeplinească parametrul real m pentru ca toate elementele lui G să fie simetrizabile, știind că $a \neq -1$.
- d) Pentru $a = -1$ să se calculeze $X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(p)$, $p \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

a) $I_2 = I_2 + 0 \cdot A = X(0) \in G$ 1p

b) Fie $X(m), X(n) \in G$. Calculăm

$$X(m) \cdot X(n) = (I_2 + mA)(I_2 + nA) = I_2 + mA + nA + mnA^2$$

$$A^2 = (a+1)A$$
1p

$$X(m) \cdot X(n) = I_2 + (m+n+mn(a+1))A = X(m+n+mn(a+1)) \in G$$
1p

c) Demonstrăm că $X(m) = X(n) \Leftrightarrow m = n$

$$X(m) = X(n) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+ma & m \\ ma & 1+m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+na & n \\ na & 1+n \end{pmatrix} \Leftrightarrow m = n$$
1p

Fie $X(m) \in G$ simetrizabil. Atunci $\exists X(m') \in G$ astfel încât

$$X(m) \cdot X(m') = X(m') \cdot X(m) = I_2 = X(0).$$

$$X(m) \cdot X(m') = X(0) \Leftrightarrow X(m+m'+mm'(a+1)) = X(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m+m'+mm'(a+1) = 0 \Rightarrow m' = -\frac{m}{1+m(a+1)}, m \neq -\frac{1}{a+1}.$$

Concluzia: $X(m) \in G$ simetizabil doar dacă $m \neq -\frac{1}{a+1}$ 1p

d) Demonstrăm prin inducție că

$$X(a_1)X(a_2) \cdot \dots \cdot X(a_n) = X(a_1+a_2+\dots+a_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$$
1p

$$X(1)X(2) \cdot \dots \cdot X(p) = X(1+2+\dots+p) = X\left(\frac{p(p+1)}{2}\right), p \in \mathbb{N}^*$$
1p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
« PETRU MOROȘAN– TRIDENT »
“MEMORIALUL MIRCEA GANGA”
EDIȚIA a VII-a, SECȚIUNEA B (M_2), BRĂILA, 06-08.11.2009

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a XII-a

Problema 2

Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție
 $x * y = e^{a \ln x - b \ln y}$, $\forall x, y \in M$, a și b fiind numere reale nenule iar e baza logaritmului natural. Determinați parametrii a și b astfel încât legea de compoziție să fie asociativă și comutativă.

Soluție:

Din comutativitate rezultă

$$a \ln x - b \ln y = a \ln y - b \ln x \Leftrightarrow (a+b)(\ln x - \ln y), \forall x, y \in M$$

Rezultă $b = -a$ și $x * y = (xy)^a$ 3 p

Din axioma asociativității se obține

$$\left((xy)^a z \right)^a = \left(x(yz)^a \right)^a, \forall x, y, z \in M$$
1p

Egalitatea este echivalentă cu $\left(\frac{x}{z} \right)^{a^2 - a} = 1, \forall x, z \in M$ 2p

De aici se obțin $a = 0$, care nu convine, și $a = 1$ iar $b = -1$ 1p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
« PETRU MOROȘAN- TRIDENT »
“MEMORIALUL MIRCEA GANGA”
EDIȚIA a VII-a, SECȚIUNEA B (M₂), BRĂILA, 06-08.11.2009

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a XII-a

Problema 3

Să se calculeze integrala nedefinită $I = \int \frac{x \cdot \arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx, x \in (-1,1)$.

Soluție:

$$I = -\int (\sqrt{1-x^2})' \arcsin^3 x dx = -\sqrt{1-x^2} \arcsin^3 x + \int \sqrt{1-x^2} \cdot 3 \arcsin^2 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \dots\dots 2p$$

$$I = -\sqrt{1-x^2} \arcsin^3 x + 3 \int \arcsin^2 x dx = -\sqrt{1-x^2} \arcsin^3 x + 3 \int (x)' \arcsin^2 x dx =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} \arcsin^3 x + 3x \arcsin^2 x - 6 \int x \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \dots\dots\dots 2p$$

$$I = -\sqrt{1-x^2} \arcsin^3 x + 3x \arcsin^2 x + 6 \int (\sqrt{1-x^2})' \arcsin x dx =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} \arcsin^3 x + 3x \arcsin^2 x + 6\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 6 \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \dots\dots\dots 2p$$

$$I = -\sqrt{1-x^2} \arcsin^3 x + 3x \arcsin^2 x + 6\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 6x + c, c \in R. \dots\dots\dots 1p$$