CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A IX A

1. Fie $N = \overline{ab}$ un număr natural de două cifre (în baza 10). Determinați N, dacă numerele a, b şi $\frac{1}{3}\cdot N$ sunt în progresie geometrică.

2. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ şi $m(\widehat{C}) = 30^\circ$. Fie $D \in (BC)$ şi $P \in (AB)$ astfel încât $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{3}, \frac{AP}{PB} = \frac{3}{2}$, iar E este piciorul bisectoarei din B. Demonstrați că dreptele CP, AD şi BE sunt concurente.

Gazeta Matematică 7-8-9/2009

3. Doi brazi, unul cu înălțimea de 28m, iar celălalt cu înălțimea de 15m, se află unul față de altul la distanța de 13m. Un iepure este situat la 35m față de vârful bradului mai înalt şi la 25m față de vârful bradului mai scund. La ce distanță se află iepurele față de dreapta care uneşte bazele celor doi brazi ?

4. Pe tablă este scris de douăzeci de ori numărul zecimal 1,1 şi de douăzeci numărul zecimal 1,11. Lucică cel obraznic a şters câteva numere dintre cele patruzeci aflate pe tablă. Stabiliți câte numere a şters Lucică, ştiind că suma numerelor rămase pe tablă este 19,93.

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A X A

1. Considerăm expresia $E(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$.

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care este bine definită expresia E(x).

b) Demonstrați că $E(x)=\dfrac{2\sqrt{1-x}}{2x-1}, \quad \forall x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right]$.

c) Rezolvați inecuația $E(x)\le 0$.

2. Calculați suma $S=\lg\left(\operatorname{tg}1^\circ\right)+\lg\left(\operatorname{tg}2^\circ\right)+\lg\left(\operatorname{tg}3^\circ\right)+...+\lg\left(\operatorname{tg}89^\circ\right)$.

3.

a) Dați un exemplu de trei numere complexe nenule z_1, z_2, z_3 astfel încât

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$$

b) Fie w_1, w_2, w_3 $\in$ $\mathbb{C}$ astfel încât $w_1+w_2+w_3\neq 0$, $w_1^2+w_2^2+w_3^2=0$ și $|w_1|+|w_2|+|w_3|=1$. Demonstrați că $|w_1+w_2+w_3|=2$.

4. Un disc este împărțit în şase părți egale prin trei diametre. În fiecare dintre sectoarele formate se află câte un pion. La o mutare, alegem doi pioni, pe care îi deplasăm în sectoare vecine celor din care pleacă. Există un şir finit de mutări în urma cărora toți pionii să ajungă într-un acelaşi sector? Justificați răspunsul.

Gazeta Matematică 10/2009

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A XI A

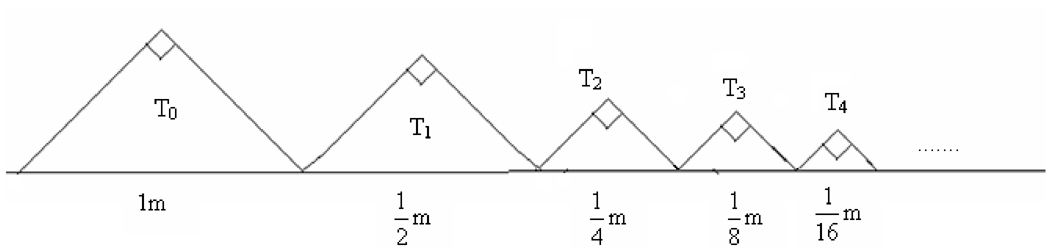
1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ şi funcţia $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$,

$f(X) = A \cdot X,\ \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$.

a) Dacă $\det A \neq 0$, demonstrați că funcția este injectivă.
b) Dacă $\det A \in \{-1, 1\}$, demonstrați că funcția este bijectivă.

2. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ o matrice, A^t transpusa sa, iar $B = A - A^t \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
a) Arătați că $B = -B^t$.
b) Demonstrați că $\det B = 0$.

3. Se consideră şirul $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de triunghiuri dreptunghice isoscele din figura de mai jos. Notăm cu s_i şi p_i aria, respectiv perimetrul triunghiului T_i, $i \in \mathbb{N}$. Definim şirurile $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prin $S_n = \sum_{i=0}^{n} s_i$, respectiv $P_n = \sum_{i=0}^{n} p_i$. Aflați limitele şirurilor $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



4. Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2},\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
a) Demonstrați că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător.
b) Arătați că există $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $a_n > 2010$.
c) Este şirul considerat convergent? Justificați răspunsul!

Gazeta Matematică 12/2009

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A XII A

1. Se consideră funcțiile $f, F:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$,

iar $F(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left[1-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

a) Demonstrați că F este primitivă a funcției f.

b) Calculați $\int_1^e f(x)F(x)dx$.

2. Fie $(G_1, *)$ şi $(G_2, \circ)$ două grupuri abeliene. Pe mulțimea produs cartezian $G = G_1 \times G_2$, definim operația pe componente „·” prin

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = (x_1 * x_2, y_1 \circ y_2),\ \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in G.$$

a) Demonstrați că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

b) Dacă $(G_1, *) = (G_2, \circ) = (\mathbb{Z}_2,+)$, stabiliți dacă grupurile $(\mathbb{Z}_4,+)$ şi $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$ sunt sau nu izomorfe.

3. Întrucât operația de scădere pe $\mathbb{Z}$ nu este asociativă, nu are element neutru şi nu este comutativă, vom spune că este de tip $(\overline{A},\overline{E},\overline{C})$. Dacă o altă operație, definită pe o mulțime M, ar fi asociativă, cu element neutru şi necomutativă, am spune că este de tip $(A,E,\overline{C})$.

Dați exemple de operații, pe mulțimi alese corespunzător, care să fie de tip (A,E,C), $(\overline{A},E,C)$, $(A,\overline{E},C)$, $(A,E,\overline{C})$, $(\overline{A},\overline{E},C)$, $(\overline{A},E,\overline{C})$, $(A,\overline{E},\overline{C})$. În fiecare dintre cele şapte situații, aduceți o minimă argumentare în sprijinul afirmației facute.

4. Calculați $\int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+3)}dx$.

Gazeta Matematică 11/2009

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7