100
2010
Anul Matematicii în
Şcoala Românească
www.anulmatematicii.ro

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-13 februarie 2010

Clasa a IX-a

Subiecte

1. Fie numerele reale pozitive $a_1, a_2, a_3, ..., a_{20}$ astfel încât

$a_1 + a_2 = 4, a_2 + a_3 = \frac{4}{3}, a_3 + a_4 = \frac{4}{5}, a_4 + a_5 = \frac{4}{7}, ..., a_{19} + a_{20} = \frac{4}{37}$ şi

A = $\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} + \frac{a_2 + a_3}{a_2 a_3} + \frac{a_3 + a_4}{a_3 a_4} + ... + \frac{a_{19} + a_{20}}{a_{19} a_{20}}$. Demonstraţi că $\sqrt{A} > 19$.

Prof Nicolae Radu,Ploieşti

2. Rezolvaţi ecuaţia:

$[x^2 - 4x + 4] = [-2x^2 + 8x - 6]$.

Prof. Petre Năchilă , prof Cătălin Năchilă,Ploieşti

3. Fie ABCDEF un hexagon convex oarecare, G_1,G_2 centrele de greutate ale ΔACE, ΔBDF, H_1,H_2 ortocentrele ΔACE, ΔBDF şi G punctul din planul hexagonului cu proprietatea că $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$.

a) Arătaţi că $\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1E} = \vec{0}$.

b) Arătaţi că $\overrightarrow{G_1G}$ şi $\overrightarrow{G_2G}$ sunt vectori coliniari.

c) Dacă hexagonul are toate vărfurile pe un cerc aratati că $\overrightarrow{G_1G} = \frac{1}{6}\overrightarrow{H_1H_2}$.

prof. Leu Gabriela , Sinaia

4. Fie triunghiul ABC, M - mijlocul lui $[BC]$, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, $DE \cap AM = \{N\}$.

Demonstraţi că:

a) daca N este mijlocul lui $[DE]$, atunci vectorii $\overrightarrow{DE}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

b) daca N este mijlocul lui $[AM]$ si $2DB = 3DA$, atunci vectorii $\overrightarrow{ME}$ şi $\overrightarrow{BN}$ sunt coliniari.

Prof . Claudiu Militaru, Ploieşti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova

Olimpiada de matematică

Etapa locală-13 februarie 2010

Clasa a X-a

Subiecte

1. Demonstraţi inegalitatea $\log_3(1+a+b)\cdot\log_3(1+b+c)\cdot\log_3(1+c+a)\leq 1$, ştiind că a, b, c >0 şi a + b + c = 3.

Prof. Doinaru Mihaiela, Sinaia

2. Rezolvaţi ecuaţia : $x+\sqrt{2^x(x+1)}=\sqrt{x+1}$.

Prof Necula Gabriel, Plopeni

3. Fie n un număr întreg.

a) Dacă r este restul împărţirii lui n^3 la 9, arătaţi că $r\in\{0,1,8\}$.

b) Demonstraţi că [$\sqrt[3]{9n+1}$] = [$\sqrt[3]{9n+7}$], unde [*x*] reprezinta partea întreagă a numărului real *x*.

Prof Cezar Apostolescu , Ploieşti

4. Fie $(z_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere complexe de acelaşi modul, cu proprietatea că $z_k^2=z_{k-1}\cdot z_{k+1}$, ∀ k ≥ 2.Ştiind că cel puţin trei termeni ai şirului sunt numere reale, arătaţi că mulţimea termenilor şirului este finită.

Gazeta Matematică 2009

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova
Olimpiada de matematică
Etapa locală-13 februarie 2010
Clasa a XI-a
Subiecte

1. Fie sirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0>0$, $x_1+x_2+...+x_n=\dfrac{1}{\sqrt{x_{n+1}}}, n\geq 0$. Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2x_n^3$

G.M.4/2009

2.Fie sirul $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$ cu proprietatile :

a) $a_n>0$, $\forall$ n$\in$**N**

b) $a_{n+1}^2\cdot a_n^2=27+2a_{n+1}\cdot a_n^2$, $\forall$ n$\in$**N** Sa se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3$

Prof. Octavian Purcaru-Ploiesti

3.Pentru fiecare numar natural considerăm matricea de ordinul 3 :

$$A_n=\begin{pmatrix} 2^{[\sqrt{n+1}]} & 2^{[\sqrt{n+2}]} & 2^{[\sqrt{n+3}]} \\ 2^{[\sqrt{n+4}]} & 2^{[\sqrt{n+5}]} & 2^{[\sqrt{n+6}]} \\ 2^{[\sqrt{n+7}]} & 2^{[\sqrt{n+8}]} & 2^{[\sqrt{n+9}]} \end{pmatrix}$$

.Sa se arate ca exista k$\in$**N** astfel incat $\forall$ n$\geq$k, n$\in$**N,** matricea A_n nu este inversabila (am notat cu [a] –partea intreagă a lui a).

Prof.Emil Vasile -Ploiesti

4. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & \varepsilon^2 b \\ b & a \end{pmatrix}$ $a,b,\varepsilon\in$ **C,** $B=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $si\ n\in$ **N***

a) Sa se demonstreze că : $$A^n=\begin{pmatrix} \dfrac{(a+b\varepsilon)^n+(a-b\varepsilon)^n}{2} & \dfrac{(a+b\varepsilon)^n-(a-b\varepsilon)^n}{2}\varepsilon \\ \dfrac{(a+b\varepsilon)^n-(a-b\varepsilon)^n}{2\varepsilon} & \dfrac{(a+b\varepsilon)^n+(a-b\varepsilon)^n}{2} \end{pmatrix}$$

b) Sa se calculeze B^n

c) Sa se rezolve in M_2(**C**) ecuatia $X^n = B$

Prof. Cezar Apostolescu-Ploiesti

SUCCES!

<u>Notă:</u>

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10

100
2010
Anul Matematicii în
Şcoala Românească
www.anulmatematicii.ro

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Prahova
Olimpiada de matematică
Etapa locală-13 februarie 2010
Clasa a XII-a
Subiecte

1. Calculati : a) $I_1 = \int \frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{x^4+2x^3+x^2+2x+1}}$, $x \in (0,+\infty)$.

Prof. Gabriel Necula - Plopeni

b) $I_2 = \int \frac{9x^3+9mx^2+(18+2m^2)x+12m}{\left(3x^2+2mx+5\right)^n}dx, x \geq 0, m \geq 0, n \in N^*$, $n \geq 3$

Prof. Doinaru Mihaiela-Sinaia

2. Se consideră sirurile :

$I_n = \int_{-a}^{a} \sin^2 nx \cdot \ln\frac{2a+x}{2a-x}dx$ si $K_n = \int_{0}^{a} \sin^2 nx \cdot \ln\frac{2a+x}{2a-x}dx$, unde a>0, fixat, $n \in \mathbf{N}^*$

a) Sa se arate că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$

b) Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} K_n$

Prof. Octavian Purcaru-Ploiesti

3. Fie A un inel cu proprietatea că daca $x \in A$ si $x^2=0$, atunci x=0.Fie $a,b,c \in A$, astfel incat a=ab, b=bc, c=ca. Sa se arate ca a=b=c.

G.M.9/2008

4. Pe **R** se defineste legea de compozitie $x \circ y = xy - ax - ay + a^2 + a$, $a \in \mathbf{R}$.

a) Determinati $\alpha, \beta \in R$ pentru care intervalul $[\alpha, \beta]$ este parte stabilă in raport cu legea si pentru care $\beta - \alpha$ este maxim ;

b) Pentru α, β determinati la punctul a), aflati multimile $H \subset [\alpha, \beta]$ astfel incat $(H, \circ)$ grup .

Prof. Militaru Claudiu –Ploiesti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10