CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A IX-A

1. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3, ..., 10\}$.

a) Câte progresii aritmetice cu trei elemente si cu rația pozitivă, se pot forma cu elementele mulțimii M ?

b) Câte progresii geometrice cu trei elemente si cu rația supraunitară, se pot forma cu elementele mulțimii M ?

2.

a) Să se arate că dintre toate dreptunghiurile de perimetru constant, pătratul are aria maximă.

b) Să se arate că dreptunghiul de arie maxima înscris într-un cerc este pătratul.

3. Spunem că perechea de numere naturale (a, b) ***este ideala*** dacă $a^2 - 2b^2 = 1$.

a) Dați exemple de două perechi de numere naturale ***ideale***

b) Arătați că ,dacă perechea (a, b)***este ideala***, atunci şi perechea $\left(a^2 + 2b^2, 2ab\right)$ ***este ideala.***

4. S-au tăiat bârne pentru lemne de foc. S-au făcut 1510 tăieturi şi s-au obținut 2010 bucăți. Câte bârne au fost la început ?

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A X-A

1. Se considera numerele $a=\log_3(\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{19})$ şi $b=\log_3(\sqrt[3]{10000}+\sqrt[3]{1900}+\sqrt[3]{361})$
   a) Calculați a + b ;.
   b) Arătați ca $a\cdot b\le 4$.

2. Se considera $\varepsilon=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}; w=1+\varepsilon$ iar $H=\{z=a+b\varepsilon \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$
   a) Arătați ca $w\in H$.
   b) Daca z_1 şi $z_2\in H$, verificați ca şi $z_1\cdot z_2\in H$.
   c) Găsiți toate numerele $z\in H$ care au modulul egal cu 1.

3. Se considera funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ iar $f_n(x)=(f_{n-1}\circ f_1)(x)$ $n\in\mathbb{N}; n\ge 2$.
   a) Rezolvați în intervalul $(0,\infty)$ ecuația $f_1(x)+f_1\left(\dfrac{1}{x}\right)=\sqrt{2}$.
   b) Rezolvați în intervalul $[0,2\pi]$ ecuația $2\cdot f_1(\mathrm{tg}x)=\sqrt{3}$.
   c) Găsiți $f_n(x)$.

4. Notam cu d_n numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi.
   a) Găsiți d_6.
   b) Verificați $d_{n+1}-d_n=n-1$, $n>2$
   c) Arătați ca $d_n=\dfrac{n(n-3)}{2}, (\forall)n\ge 3$

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A XI-A

1. Se da matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$. Sunt premise următoarele doua operații:

- Adunarea numărului 1 la fiecare dintre elementele oricărei linii.
- Scăderea numărului 1 din fiecare dintre elementele oricărei coloane.

a) Este matricea A inversabila?
b) Plecând de la matricea A si utilizând operațiile date, se poate obține transpusa acestei matrice? Justificați răspunsul.

2. În planul raportat la sistemul ortogonal de axe de coordonate se considera punctele $A_n(n+1, n^2+2n+4), n\in\mathbb{N}^*$
a) Calculați aria triunghiului $A_1A_2A_3$.
b) Arătați ca aria triunghiului $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ este independenta de n.

3.
a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$

b) Să se determine $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x+...+\sin 2010x}{\sqrt{1+x}-1}$.

4.
a) Să se determine L(m) = $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-\dfrac{|m|}{2}x^2)^{\frac{2}{x^2}}, m\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate ca : $L(m_1)\cdot L(m_2)\le\dfrac{1}{e}\cdot L(m_1+m_2), \forall m_1, m_2\in\mathbb{R}$.

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A XII-A

1.

a) Demonstrați că $\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int \frac{x^2+x-3}{x^2-4}dx$, $x\in(2,\infty)$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+3, x<1 \\ ax^2+x+2, x\geq 1 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine a astfel încât f să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru a determinat anterior, să se calculeze $\int f(x)dx$.

3. Fie (G, ·) un grup cu 5 elemente şi $e\in G$, elementul neutru al grupului.

a) Să se dea un exemplu de asemenea grup.

b) Se admite că G e comutativ şi că $x^5 = e$, $\forall x\in G$. Fie $y\in G-\{e\}$.

Să se arate că $G=\{y,y^2,y^3,y^4,y^5\}$.

4. Fie $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2 şi A^7.

b) Să se arate că (G, ·)e grup comutativ, unde $G=\{A^n / n\in\mathbb{N}^*\}$.

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7